
Stanford University Libraries
3105 024 620 218



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Sechszehnter Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Separat-Conto.

1851.



Inhaltsverzeichniss des sechszehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

(S. auch Nautik.)

Trigonometrie.

(S. auch Arithmetik Nr. XXI. und XXXV.).

Geodäsie.

Mechanik.

Nautik.

Physik.

Astronomie.

S. Physik. Nr. XIV. Heft II. S. 153.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die Mittelpunkte der geometrischen Gebilde.

Von

Herrn Dr. Anton Müller,

ord. Professor der Math. an der Universität in Zürich.

Die Geometrie überhaupt, die höhere wie die elementare, enthält manche Sätze, welche als völlig isolirt dastehen, im Gegensatze zu vielen Sätzen, deren nähere oder entferntere Verwandschaft mit anderen nachgewiesen wird. So wird z. B. gezeigt, dass einem Dreiecke ABC drei Punkte PQR zukommen, von denen jeder der gemeinsame Durchschnitt dreier Linien ist, und welche mit einander in einer geraden Linie liegen: die drei Linien, welche aus den Eckpunkten ABC nach den Mitten der Seiten gehen, schneiden einander in einem Punkte P; und drei zu den Seiten senkrechte Linien haben einen Punkt Q mit einander gemein, wenn sie durch die Mitten der Seiten gehen, aber einen Punkt R, wenn sie durch die Eckpunkte gehen. Dass bei Vierecken, Fünfecken u. s. w. Analoges sich finden lasse, ist ausser Zweifel: gleichwohl geben die Lehrbücher darüber nicht Aufschluss. Aehnliches gilt von anderen Eigenschaften. Ein solches Isolirtsein einer Einzelnheit ist immer ein Zeichen, dass man nicht alle Seiten kennt, und namentlich jene nicht, welche den Weg zur Auffindung des Ganzen, dem das Einzelne angehört, zu zeigen geeignet sind. Hierin lag zu allen Zeiten ein mächtiger Sporn zur vielseitigen Betrachtung einer Sache, um auf diesem Wege die Einsicht in das Ganze zu erlangen. Es sind indess vielfach alle Bemühungen vergeblich; nicht selten aber bleibt auch eine Sache ohne Beachtung, weil man von dem Werthe derselben keine Ahnung hat, während die Auffindung des Ganzen, dem die Sache angehört, zu den minder schwierigen Aufgaben zu zählen

ist. In letzterer Beziehung bietet der Punkt P eines Dreieckes ABC, in welchem die drei, aus den Eckpunkten nach den Mitten der Seiten gehenden Linien einander durchschneiden, ein merkwürdiges Beispiel, dessen nähere Beleuchtung einiges Interesse gewähren dürfte.

Wenn man (Taf. I. Fig. 1.) von den Seiten eines Dreieckes ABC jede in drei gleiche Theile theilt, und von den Theilungspunkten mnp.. jedes Paar, das einer Seite zunächst liegt, durch eine gerade Linie verbindet, so erhält man drei Linien mq, nr, ps; jede derselben ist zu einer Seite des Dreiecks parallel, und je zwei von ihnen halbiren einander; folglich gehen alle drei durch einen Punkt P.

Dieser Punkt P ist eben derselbe, in welchem die aus den Eckpunkten nach den Mitten der Seiten gehenden Linien einander durchschneiden: denn eine durch A und P gelegte Linie muss die Seite BC halbiren. Wir haben somit eine Bestimmung des Punktes P unabhängig von den durch die Eckpunkte gelegten Linien.

Betrachten wir nun (Taf. I. Fig. 2.) den Punkt P als auf die erwähnte Weise bestimmt, und legen durch denselben die Linien Aa und Bb, und ausser diesen noch eine dritte Linie MO, welche nicht durch einen Eckpunkt geht. Diese drei Linien Aa, Bb, MO haben das mit einander gemein, dass jede durch P geht, und alle drei Seiten durchschneidet. Nun bestehen, dem Vorhergehenden zufolge, zwischen den von P ab gezählten Segmenten der Linien Aa und Bb die bekannten Sätze

$$PA = 2.Pa, \quad PB = 2.Pb;$$

mithin auch die Sätze

$$\frac{1}{Pa} = \frac{2}{PA} \quad \text{und} \quad \frac{1}{Pb} = \frac{2}{PB};$$

es fragt sich also: welcher Zusammenhang besteht zwischen den Segmenten PM, PN und PO der dritten Linie MO?

Die Antwort liegt in dem Satze

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PN} + \frac{1}{PO}, \tag{α}$$

dessen Richtigkeit auf folgende Weise dargethan wird.

Man betrachte AB und AC als Transversalen des Dreieckes POa, so hat man die Sätze

$$PA.aB.OM = PM.aA.OB,$$

$$PA.aC.ON = PN.aA.OC;$$

mithin, weil $aA = 3.Pa$, $PA = 2.Pa$, und $2.aB = 2.aC = BC$ ist,

$$\frac{OM}{PM}=\frac{3.OB}{BC},$$

$$\frac{ON}{PN}=\frac{3.OC}{BC}.$$

Hierin führe man ein:

$$OM=PO+PM,$$

$$ON=PO-PN,$$

$$OB=OC+BC$$

und subtrahire dann die zweite Gleichung von der ersten, so ergiebt sich

$$\frac{PO}{PM}-\frac{PO}{PN}=1,$$

daher ist

$$\frac{1}{PM}=\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO},$$

was bewiesen werden sollte.

Durch den Satz (α) ist eine erweiterte Bedeutung des Punktes P gewonnen: es ist ein Gesetz ausgedrückt, das für die Segmente einer jeden durch P gelegten geraden Linie gilt. Im besonderen Falle, wenn eine durch P gelegte Linie zugleich durch *einen* Eckpunkt geht, werden zwei Segmente gleich gross, und wenn *die* Linie zu einer Seite parallel ist, so wird ein Segment $=\infty$, und die beiden anderen sind gleich gross.

Ehe ich die gefundene Bedeutung des Punktes P benutze, um einen Schritt weiter zu thun, werde ich den analogen Punkt betrachten, der einem Tetraeder zukommt.

Wenn man (Taf. I. Fig. 3.) von den Kanten eines Tetraeders $ABCD$ eine jede in vier gleiche Theile theilt, und jede Ternion der Theilungspunkte, welche einer Seitenfläche zunächst liegt, durch gerade Linien verbindet, so erhält man zwölf Linien, und durch diese zugleich vier Ebenen abc, $a'c'd'$, $a''d''b''$, $b'''c'''d'''$. Jede der zwölf Verbindungslinien ist zu einer Kante parallel; daher durchschneiden diese Linien einander in solchen Punkten $m\ n\ p\ q \ldots$, wodurch jede einzelne derselben in drei gleiche Theile getheilt wird. Weil jede der Ebenen abc, $a'c'd'$, ... zu einer Seitenfläche parallel ist, so ist jede, zweien dieser Ebenen gemeinsame Linie zu einer Kante parallel. Die sechs Durchschnittslinien der Ebenen abc,.... gehen aber durch die Punkte $m\,n$....., daher müssen jede zwei derselben einander halbiren. Hieraus aber folgt, dass die sechs Linien mm', nn', pp',.... durch einen einzigen Punkt P gehen.

Legt man durch den so bestimmten Punkt P und durch den Eckpunkt A eine gerade Linie AP, so muss diese der gegenüberliegenden Seitenfläche BCD in einem Punkte P' begegnen, dem vermöge seiner Lage in dem Dreiecke BCD die in (α) bezeichnete Eigenschaft zukommt. Werden nämlich von A aus durch p und p' die Linien AQ und AR gezogen, und zugleich Q in BC und R in CD mit einander verbunden, so ist die neue Linie QR zu pp' parallel, mithin P' die Mitte von QR; zugleich ist BQ von BC, und DR von DC der dritte Theil, also QR zu BD parallel; folglich hat P' die erwähnte Lage. Endlich ist $P'A = 4.PP'$, und $PA = 3.PP'$, oder

$$\frac{1}{PP'} = \frac{3}{PA}.$$

Man lege nun (Taf. I. Fig. 4.) durch P eine gerade Linie LPO, welche zwar nicht durch einen Eckpunkt geht, aber dennoch mit jeder Seitenfläche einen Punkt gemein hat. Diese Linie liegt mit APP' in einer Ebene, welche ebenfalls jede Seitenfläche durchschneidet. Es seien AM', AN', AO', LO' die Durchschnittslinien der Seitenflächen und der erwähnten Ebene, und demgemäss $LMNO$ die Punkte, welche die Linie LPO mit den Seitenflächen gemein hat. Unter dieser Voraussetzung hat man, weil AM', AN', AO' Transversalen des Dreieckes LPP' sind, die Sätze

$$PA.LM.P'M' = PM.LM'.P'A,$$

$$PA.LN.P'N' = PN.LN'.P'A,$$

$$PA.LO.P'O' = PO.LO'.P'A.$$

Weil nun $PA = 3.PP'$, und $P'A = 4.PP'$ ist, so folgt hieraus:

$$\frac{3.LM}{PM} = \frac{4.LM'}{P'M'},$$

$$\frac{3.LN}{PN} = \frac{4.LN'}{P'N'},$$

$$\frac{3.LO}{PO} = \frac{4.LO'}{P'O'}.$$

Hierin führe man ein:

$$LM = PL - PM; \quad LM' = P'L - P'M'$$

$$LN = PL - PN; \quad LN' = P'L - P'N',$$

$$LO = PL + PO; \quad LO' = P'L + P'O'$$

und subtrahire dann die Summe der ersten und zweiten Gleichung von der dritten, so entspringt

$$3.PL.\left(\frac{1}{PO}-\frac{1}{PM}-\frac{1}{PN}\right)=4.P'L.\left(\frac{1}{P'O'}-\frac{1}{P'M'}-\frac{1}{P'N'}\right)+3.$$

Dem Gesetze (α) zufolge ist aber

$$\frac{1}{P'O'}=\frac{1}{P'M'}+\frac{1}{P'N'},$$

folglich auch

$$\frac{1}{PO}=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}. \qquad (\beta)$$

Dieser Satz giebt den Zusammenhang der Segmente PL, PM, PN und PO an.

Bei der Annahme der Linie LPO ist überhaupt eine Richtung gewählt, bei welcher die Punkte, in denen die Linie LPO den Seitenflächen begegnet, von einander verschieden sind; indess ist die Richtung von LPO doch eine solche, dass auf der einen Seite von P der Punkt O allein ist, während auf der anderen Seite die drei Punkte $L\ M\ N$ liegen. Im Gegensatze zu dieser Richtung der Linie LPO steht eine andere (Taf. I. Fig. 5.), bei welcher die Punkte $LMNO$ paarweise vertheilt sind, auf der einen Seite von P die Punkte L und M, auf der anderen aber N und O liegen. Man hat übrigens in diesem wie im vorhergehenden Falle die Sätze

$$\frac{3.LM}{PM}=\frac{4.LM'}{P'M'},$$

$$\frac{3.LN}{PN}=\frac{4.LN'}{P'N'},$$

$$\frac{3.LO}{PO}=\frac{4.LO'}{P'O'};$$

und hieraus erhält man, wenn man die Werthe

$$LM=PL-PM;\ LM'=P'L-P'M',$$

$$LN=PL+PN;\ LN'=P'L+P'N',$$

$$LO=PL+PO;\ LO'=P'L+P'O'$$

einführt, und dann die erste Gleichung von der Summe der zweiten und dritten subtrahirt, die Gleichung:

$$3.PL.\left(\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}-\frac{1}{PM}\right)=4.P'L.\left(\frac{1}{P'N'}+\frac{1}{P'O'}-\frac{1}{P'M'}\right)+3.$$

Nach (α) ist aber

$$\frac{1}{P'N'}+\frac{1}{P'O'}=\frac{1}{P'M'},$$

folglich wird

$$\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}. \qquad (\gamma)$$

Die Sätze (β) und (γ) sind zwar verschieden, wie die Fälle, auf welche sie Bezug haben. Bringen wir aber diese Gleichungen auf die Form

$$0=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{1}{-PO},$$

$$0=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{-PN}+\frac{1}{-PO};$$

so fällt in die Augen, dass jeder von den Sätzen (β) und (γ) nur eine specielle Anwendung eines allgemeinen Satzes ist, der also lautet: einem Tetraeder kommt ein Punkt P von solcher Lage zu, dass in einer durch P gelegten geraden Linie, welche in den Punkten $LMNO$ den Seitenflächen begegnet, die von P ab gezählten Segmente PL, PM,.... in der durch die Gleichung

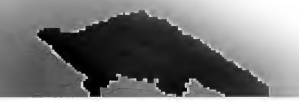
$$0=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}$$

bezeichneten Weise zusammenhängen.

In gleicher Weise kann man in Bezug auf die Segmente einer geraden Linie, welche durch den Punkt P eines Dreieckes gelegt ist, und in den Punkten M N O die Seiten durchschneidet, den Satz aufstellen:

$$0=\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO}.$$

Nachdem die eigentliche Bedeutung des, einem Tetraeder angehörigen Punktes P nachgewiesen worden, ist es leicht, den Beweis zu liefern, dass einem Vierecke, oder besser ausgedrückt, einem Aggregate von vier geraden Linien, die in einer Ebene liegen, ein solcher Punkt P zukomme, wie dem Dreiecke. Man nehme an, es sei der einem Tetraeder $ABCD$ zukommende Punkt P bestimmt, und es seien durch P zwei gerade Linien gelegt, von denen die eine in den Punkten $LMNO$, die andere in den Punkten $L'M'N'O'$ die Seitenflächen durchdringt. Diese geraden Linien LPO und $L'PO'$ liegen in einer Ebene E, und bestimmen daher in den Seitenflächen des Tetraeders vier solche gerade



Linien LL', MM',...., welche ein ebenes Aggregat constituiren. Man nehme weiter an, in der Ebene E seien durch P noch andere gerade Linien gelegt, welche in den Punkten L'' M'' N'' O'', u. s. w. die Seitenflächen durchschneiden. In sofern die Punkte $LMNO$.. in den Seitenflächen des Tetraeders liegen, hat man die Sätze:

$$0=\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{1}{PO},$$

$$0=\frac{1}{PL'}+\frac{1}{PM'}+\frac{1}{PN'}+\frac{1}{PO'},$$

$$0=\frac{1}{PL''}+\frac{1}{PM''}+\frac{1}{PN''}+\frac{1}{PO''},$$

u. s. w.

Nun gehören aber die Punkte LM...... auch dem Aggregate der vier Linien LL', MM',... an; es hat also der Punkt P in dem Aggregate eine solche Lage, dass zwischen den Segmenten irgend einer geraden Linie, welche in dem Aggregate durch den Punkt P gelegt ist, der in den vorstehenden Gleichungen bezeichnete Zusammenhang besteht.

Hiermit ist die Beschränkung auf Dreieck und Tetraeder beseitigt, und das Bestehen eines allgemeinen Gesetzes angedeutet, das sich ungefähr so ausdrücken lässt: in einem Aggregate von n geraden, in einer Ebene liegenden Linien, und auch in einem Aggregate von n Ebenen giebt es einen Punkt P von solcher Lage, dass in einer geraden Linie, welche durch P geht, und in den Punkten A_1, A_2.... A_n die Bestandtheile des Aggregates durchschneidet. die von P ab gezählten Segmente PA_1, PA_2,.. in einem durch die Gleichung

$$0=\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PA_2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{PA_n}$$

bezeichneten Zusammenhange stehen, und dass diese Relation in Bezug auf die Richtung der geraden Linie an keine Bedingung geknüpft ist.

In diesem allgemeinen Satze ist, in so fern man dessen Geltung im Voraus zugiebt, die dem Punkte P beigelegte Eigenschaft rücksichtlich der Segmente einer durch P gehenden geraden Linie ganz unzweifelhaft; dagegen bleibt unbestimmt, ob ein Aggregat nur einen einzigen Punkt P, oder aber mehrere solche Punkte haben könne; und eben so ist ungewiss, ob das Vorkommen solcher Punkte P unbedingt, oder durch die Beschaffenheit der Aggregate bedingt ist.

Lässt man diese Fragen vorläufig bei Seite, und sieht lediglich auf die dem Punkte P beigelegte Eigenschaft, so kann die Bemerkung nicht entgehen, dass in der Angabe derselben gar

nichts liegt, was eine Beschränkung auf Aggregate von geraden Linien und auf Aggregate von Ebenen als nothwendig bezeichnete; es ist im Gegentheile unverkennbar, dass ein solcher Punkt P vermöge der, seiner Lage zukommenden Eigenschaft ganz wohl einer krummen Linie, und auch einem Aggregate von (geraden oder krummen) Linien, die in einer Ebene liegen, angehören kann, und dass das Gleiche auf Flächen und auf Aggregate von Flächen Anwendung findet.

Diese Betrachtungen führen zwar nicht zur Gewissheit, gewähren aber die Einsicht, dass man bei der Frage nach dem Vorkommen der Punkte P es mit einer Eigenschaft zu thun hat, welche den ebenen Liniengebilden und auch den Flächengebilden, also überhaupt den geometrischen Gebilden zukommt. Als eine den geometrischen Gebilden gemeinsame Eigenschaft kann aber das Vorkommen der Punkte P schlechthin nicht isolirt stehen: dasselbe muss mit anderen Eigenschaften, welche den Gebilden ebenfalls gemeinsam sind, irgendwie zusammen hängen, in dem Systeme aller Eigenschaften, welche die Gebilde mit einander gemein haben, eine bestimmte Stelle einnehmen. Will man also über das Vorkommen der Punkte P zur vollen Klarheit gelangen, so muss man sich in einem ganz anderen Gebiete umsehen, als die Elementarsätze über jene Punkte anzudeuten scheinen.

Seit der Einführung der Coordinaten durch Descartes werden die krummen Linien und eben so die Flächen nach den ihnen zukommenden Gleichungen in Ordnungen vertheilt, in der Weise, dass der Grad ihrer Gleichung zugleich die Ordnung einer Linie oder Fläche bezeichnet, und demgemäss alle Linien und alle Flächen, deren Gleichungen von einerlei Grad sind, als zu einerlei Ordnung gehörig betrachtet werden.

Hiernach ist es ganz richtig, dass die Gleichungen aller zu einerlei Ordnung gehörigen Linien oder Flächen nichts weiter sind als Specialfälle einer allgemeinen Gleichung, d. i. einer solchen, deren Coefficienten ohne Werth- und Formbestimmung, lediglich unbestimmte Zeichen sind. Von einer solchen Gleichung kann man aber nicht umgekehrt sagen, sie sei die allgemeine Gleichung aller zu einer Ordnung gehörigen Linien oder Flächen, aus dem einfachen Grunde, weil die Gleichung ein grösseres Gebiet umfasst, das ausser den Linien oder Flächen auch noch andere Gebilde enthält. So ist es, um ein Beispiel anzuführen, schlechthin ungenau, wenn man die Gleichung zwischen den Coordinaten xy vom dritten Grade

$$0 = x^3 + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3 + Dx^2 + \ldots$$

so lange $ABC\ldots$ lediglich Zeichen für die Coefficienten sind, als die allgemeine Gleichung der Linien dritter Ordnung betrachtet:

einem Aggregate von drei geraden Linien, die in einer Ebene liegen, und eben so einem Aggregate von einer geraden Linie und einem Kegelschnitt gehört eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines seiner Punkte an, welche ebenfalls vom dritten Grade ist, und jede solche Gleichung ist in der obigen allgemeinen als Specialfall enthalten. Um also genau zu sein, wird man sagen es seien alle ebenen Liniengebilde dritter Ordnung in der obigen allgemeinen Gleichung begriffen.

Eben so unbestreitbar und richtig ist auch, dass eine Untersuchung der zu einer Ordnung gehörigen Linien, wobei die allgemeine Coordinatengleichung des entsprechenden Grades als Grundlage dient, nicht mit den Linien selbst anfangen kann. Es fehlt nämlich die Definition dieser Linien als solcher, indem dasjenige, was durch die Coordinatengleichung ausgedrückt wird, sich nicht auf diese oder jene Gebilde ausschliesslich, sondern auf alle Gebilde derselben Ordnung bezieht.

Bei einer solchen Auffassung der Bedeutung, welche den allgemeinen Coordinatengleichungen zukommt, steht schon vor aller Untersuchung als unzweifelhafte Thatsache fest, dass den Liniengebilden von einerlei Ordnung, desgleichen auch den Flächengebilden von einerlei Ordnung viele Eigenschaften gemein sein müssen. Hiervon ausgehend habe ich in der Schrift: „Die Fundamentalgesetze der höheren Geometrie“, wovon so eben die erste Abtheilung in der Hallberger'schen Verlagshandlung in Stuttgart erschienen ist, in möglich grösster Vollständigkeit diejenigen Gesetze zu entwickeln versucht, welchen die gemeinsamen Eigenschaften sowohl der Linien — als der Flächengebilde unterworfen sind. Hierbei stellt sich die Mannigfaltigkeit und die verschiedenartige Natur jener Eigenschaften heraus. Es finden sich solche Eigenschaften, denen eine unbedingte und unveränderte Geltung zukommt, welche also von der besonderen Beschaffenheit der Gebilde völlig unabhängig sind; sodann ergeben sich auch Eigenschaften von veränderlicher Natur, welche von der Beschaffenheit der Gebilde mehr oder weniger abhängen. Insbesondere erlangt man in Bezug auf Ueber- und auf Unterordnung der gemeinsamen Eigenschaften eine solche Einsicht, dass auch nicht der mindeste Zweifel obwalten kann. Indem die Untersuchung auf dies alles eingeht, und namentlich auch auf die Modificationen, welche die veränderlichen Eigenschaften erleiden können, führt sie Schritt für Schritt tiefer in die einzelnen Theile des Gebietes der zusammenhörigen Gebilde, und man hat endlich die individuellen Gebilde, in streng logischer Anordnung aufgeführt.

Die Art und Weise, zu den gemeinsamen Eigenschaften der zu einerlei Ordnung gehörigen Gebilde zu gelangen, ist ziemlich einfach. Durch die Voraussetzung der Coordinatengleichung des $n$ten Grades hat man zunächst das Mittel zur formellen Behandlung der Frage nach denjenigen Punkten, welche eine gerade Linie mit einem Linien- oder Flächengebilde der $n$ten Ordnung gemein haben kann. Die Anzahl dieser Punkte ist, wie bekannt, nicht grösser als n, und man findet die einzelnen Punkte nicht allein durch Ermittelung ihrer Coordinaten, sondern auch auf zwei

andere Weisen, welche darauf beruhen, dass die Lage einer geraden Linie bestimmt ist sowohl durch einen ihrer Punkte und durch ihre Richtung, als auch durch zwei ihrer Punkte.

Indem man die Lage einer geraden Linie oder einer Transversalen T, welche ein Gebilde L der $n$ten Ordnung durchschneidet, durch Voraussetzung ihrer Richtung und eines Punktes O derselben bestimmt, ist die Möglichkeit dargeboten, die Punkte A_1, $A_2 \ldots\ldots A_n$, welche das Gebilde L mit der Transversalen T gemein hat, durch ihre Lage gegen O anzugeben: man hat nur die Segmente OA_1, $OA_2 \ldots . OA_n$ zu bestimmen. Wenn aber A irgend einer von den Punkten A_1, $A_2 \ldots\ldots A_n$, also OA eines der Segmente OA_1, $OA_2, \ldots . OA_n$ ist, so lassen sich die Coordinaten des Punktes A einzeln darstellen durch das Segment OA, durch die Coordinaten von O, und durch die Elemente der Richtung der Transversalen T; die Substitution dieser Werthe der Coordinaten von A in der vorausgesetzten Coordinatengleichung führt zu einer Gleichung für OA von der Form

$$0 = M_0 . OA^n + M_1 . OA^{n-1} + \ldots . + M_{n-1} . OA + M_n ;$$

Die Coefficienten $M_0 M_1 \ldots$ dieser Gleichung enthalten dreierlei Grössen: die Coefficienten der vorausgesetzten Coordinatengleichung, sodann die Coordinaten des Punktes O, und endlich die Elemente der Richtung der Transversalen T; zugleich lässt sich die Art, in welcher die Coefficienten $M_0 M_1$ aus den erwähnten Grössen gebildet werden, durch ein Gesetz ausdrücken. Im Falle L ein Liniengebilde $n$ter Ordnung ist, dessen Gleichung zwischen senkrechten Coordinaten durch den Satz

$$0 = \mathfrak{F}(x,y)$$

angezeigt wird, hat man unter der Voraussetzung, dass $\xi\eta$ die Coordinaten des Punktes O seien, und dass die Transversale T um den Winkel u zur Axe der x geneigt sei, das Bildungsgesetz:

$$M_r = \frac{\cos u^{n-r}}{1^{n-r|1}} \cdot \sum_{0}^{n-r}{}_{s} \frac{(n-r)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{d^{n-r}\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi^{n-r-s} . d\eta^{s}} . \mathrm{tg} u^{s} .$$

Diesem völlig analog ist das Bildungsgesetz von M_r für den Fall, dass das Gebilde L ein Flächengebilde ist.

Nach vorstehender Bildungsnorm ist M_r in Rücksicht der Coordinaten $\xi\eta$ eine Grösse der $r$ten Dimension, so dass in M_0 die Coordinaten $\xi\eta$ gar nicht vorkommen, in M_1 nur die ersten Potenzen derselben, u. s. w.

Die Segmente OA_1, $OA_2, \ldots\ldots$ sind die Wurzeln der obigen Gleichung für OA; daher hat man zwischen diesen Segmenten und den Coefficienten $M_0 M_1 \ldots .$ jener Gleichung ein System von n Sätzen, dessen allgemeines Glied durch die Gleichung

$$(OA_1\ OA_2 \ldots . OA_n)^{(p)} = (-1)^p . \frac{M_p}{M_0}$$

bezeichnet wird, vorausgesetzt, dass der Ausdruck links die Summe der Verbindungen aus $OA_1, OA_2 \dots\dots$ zu p Elementen andeute.

Der Punkt O ist hierbei als angenommen betrachtet. Ob die Annahme eine directe oder eine mittelbare ist, bleibt ausser der Beachtung. Unter den mittelbaren Annahmen von O ist aber auch jene zulässig, welche festsetzt, der Punkt O soll, wie die Punkte $A_1, A_2 \dots A_n$ auch liegen mögen, gegen diese Punkte in der Transversalen T eine solche Lage haben, dass zwischen den Segmenten $OA_1, OA_2, \dots\dots$ die Gleichung

$$(OA_1\, OA_2 \dots\dots OA_n)^{(h)} = 0 \qquad \text{(C)}$$

stattfindet. Dieser Forderung nämlich genügen nach dem Vorhergehenden die Coordinaten des Punktes O, wenn sie solche Werthe haben, dass $M_h = 0$ wird. Im Falle also das Gebilde L ein Liniengebilde ist, so muss der Forderung (C) gemäss sein

$$0 = \sum_{0}^{n-h} {}_s \frac{(n-h)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{d^{n-h}\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi^{n-h-s} . d\eta^s} . \operatorname{tg} u^s. \qquad \text{(D)}$$

Diese Gleichung zwischen ξ und η ist vom $h$ten Grade und gehört einem Liniengebilde der $h$ten Ordnung an. Von diesem Liniengebilde muss also O ebenfalls ein Punkt sein, wenn O durch seine Lage in der Transversalen T der gestellten Forderung (C) genügen soll.

Weil das Gebilde (D) von der $h$ten Ordnung ist, so kann dasselbe h Punkte mit der Transversalen T gemein haben. Deshalb enthält die Transversale T zwischen den Punkten $A_1, A_2 \dots A_n$ nicht bloss einen Punkt O, sondern h solche Punkte O, von denen jeder durch seine Lage die Forderung (C) befriedigt.

Die Coordinaten $\xi\eta$ in der Gleichung (D) beziehen sich überhaupt auf einen Punkt des Gebildes (D), aber nicht nothwendig und ausschliesslich auf O. Aus diesem Grunde enthält die Gleichung (D) von der Transversalen T lediglich den Winkel u. Es muss also jede Transversale, deren Richtung durch u angezeigt ist, von dem Gebilde (D) in h solchen Punkten geschnitten werden, von denen jeder in seiner Linie T der Forderung (C) genügt.

Wegen dieser Eigenschaft nenne ich das Gebilde (D) einen zur Richtung u gehörigen **Diameter der $h$ten Ordnung** des Liniengebildes L.

Wenn die Gleichung (D) auch nicht für jeden Werth von u einem Liniengebilde angehört, so sind unter den möglichen Werthen von u doch solche, bei deren jedem die Gleichung (D) ein Liniengebilde bezeichnet.

Ein Liniengebilde L der $n$ten Ordnung hat demnach, und zwar unbedingt, Diameter der $h$ten Ordnung. Dies gilt aber für jeden der Werthe $h = 1, 2, \dots n-1$; mithin kommen einem Linien-

gebilde L der $n$ten Ordnung Diameter der ersten, zweiten, ...$(n-1)$ten Ordnung zu.

Dieser Satz gilt auch für Flächengebilde der $n$ten Ordnung, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Diameter nicht Linien-, sondern ebenfalls Flächengebilde sind.

Ich betrachte nun im Besonderen die Diameter der $(n-1)$ten Ordnung, weil diese über das Vorkommen der Punkte P, von denen oben die Rede war, bestimmten Aufschluss geben.

Indem man $h=n-1$ setzt, erhält man aus dem obigen Satze (D) für den zur Richtung u gehörigen Diameter der $(n-1)$ten Ordnung die Gleichung

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi}+\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\eta}.\operatorname{tg}u. \qquad \text{(a)}$$

Hiernach sind die Gleichungen jener Diameter, welche zu den Richtungen $u=0$ und $u=90^\circ$ gehören, folgende:

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\xi}, \qquad \text{(b)}$$

$$0=\frac{d\mathfrak{F}(\xi,\eta)}{d\eta}. \qquad \text{(c)}$$

Diese zwei Diameter können einander durchschneiden in einer Anzahl von Punkten, welche möglicher Weise bis zu $(n-1)^2$ ansteigt. Es ist aber offenbar, dass die Coordinaten jener Punkte, welche die Diameter (b) und (c) mit einander gemein haben, auch der Gleichung (a) genügen, und zwar unabhängig von u. Daher sind diejenigen Punkte, in welchen die Diameter (b) und (c) einander durchschneiden, allen Diametern der $(n-1)$ten Ordnung gemein.

Diese Punkte, von denen jeder allen Diametern der $(n-1)$ten Ordnung gemein ist, nenne ich die Mittelpunkte des Liniengebildes L.

Es sei O ein Mittelpunkt des Gebildes L; durch O sei nach beliebiger Richtung hin eine Transversale T angenommen, und es seien $A_1, A_2 \dots A_n$ die Punkte, welche T mit L gemein hat. Dieser Annahme gemäss ist O ein Punkt des zur Richtung von T gehörigen Diameters der $(n-1)$ten Ordnung, daher muss, dem obigen Satze (C) zufolge, zwischen den Segmenten $OA_1, OA_2 \dots\dots OA_n$ folgende Gleichung stattfinden:

$$0=(OA_1\ OA_2 \dots OA_n)^{(n-1)}.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, und zwar ganz unabhängig von der Richtung der Transversalen T, wenn O ein Doppelpunkt des Gebildes L ist: denn in diesem Falle sind unter den Segmenten $OA_1, OA_2 \dots$ irgend zwei $=0$. Demnach ist jeder Doppelpunkt des Gebildes L zugleich ein Mittelpunkt.

Im Falle O nicht ein Doppelpunkt des Gebildes L, also überhaupt nicht ein Punkt von L selber ist, kann man die vorangehende Gleichung durch das Product aus allen Segmenten dividiren, und es entsteht der Satz

$$0 = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \dots\dots + \frac{1}{OA_n}.$$

Hierdurch wird nun klar, dass die früher besprochenen Punkte P nichts anderes sind als Mittelpunkte der Gebilde. Eben darum sind jetzt auch die Mittel bezeichnet, durch welche man in jedem gegebenen Liniengebilde jene Punkte P wirklich finden kann.

Da die Bestimmung der Punkte P, wie mir scheint, nicht ohne Interesse und Nutzen ist, und dieser Gegenstand in meiner oben erwähnten Schrift nur kurz berührt werden konnte, so dürfte ein näheres Eingehen in die Sache nicht unerwünscht sein. Ich werde mich jedoch auf Aggregate, welche aus geraden Linien bestehen, beschränken, und insbesondere die Bestimmung der Punkte P mittelst Zeichnung erläutern.

Ein ebenes Liniengebilde L sei aus n geraden Linien zusammengesetzt, und es sollen diese Linien alle einander durchschneiden.

Die Anzahl der Punkte, in welchen die n Linien einander durchschneiden, ist $=\frac{n.(n-1)}{1.2}$. Jeder von diesen Punkten ist ein Doppelpunkt, also auch ein Mittelpunkt von L. Die Anzahl aller dem Gebilde L zukommenden Mittelpunkte ist aber $=(n-1)^2$, daher ist die Anzahl der dem Gebilde L angehörigen Punkte P, d. h. jener Mittelpunkte, welche nicht zugleich Doppelpunkte sind,

$$=(n-1)^2 - \frac{n.(n-1)}{1.2} = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

Hiernach hat also

ein Aggregat von 3 geraden Linien 1 Punkt P,
„ „ „ 4 „ „ 3 Punkte P,
„ „ „ 5 „ „ 6 „ P,
„ „ 6 „ „ 10 „ P,
u. s. w.

Die Gleichung des vorausgesetzten Gebildes L hat die Form:

$$0=(x-y.\cot k_1+l_1)(x-y.\cot k_2+l_2)\ldots.(x-y.\cot k_n+l_n).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\xi-\eta.\cot k_s+l_s=F_s,$$

so ist in unserem Falle

$$\mathfrak{F}(\xi,\eta)=F_1.F_2.F_3\ldots.F_n,$$

folglich die Gleichung (a) des zur Richtung u gehörigen Diameters der $(n-1)$ten Ordnung jetzt folgende:

$$0=\frac{d(F_1.F_2\ldots F_n)}{d\xi}.\cot u+\frac{d(F_1.F_2..F_n)}{d\eta}. \qquad \text{(I)}$$

Diese Gleichung ist vom $(n-1)$ten Grade, und gehört einer Linie der $(n-1)$ten Ordnung an. In dieser Linie liegen alle Mittelpunkte von L; sie geht also durch alle Punkte, in welchen die Bestandtheile von L einander durchschneiden, und enthält zugleich die $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Punkte P. Man hat also nur zwei solche Linien der $(n-1)$ten Ordnung zu zeichnen, um die Punkte P zu erhalten.

Man kann aber noch leichter zum Ziele kommen. Bezeichnen wir nämlich die Grössenreihe $F_1, F_2, \ldots F_n$, indem wir nicht von F_1, sondern überhaupt von einem Gliede F_ϱ derselben zu zählen anfangen, durch

$$F_\varrho, F_{\varrho+1}, F_{\varrho+2}\ldots\ldots F_{\varrho+n-1},$$

wobei also $F_{\varrho+n}$ mit F_ϱ einerlei ist, und bemerken, dass

$$d(F_\varrho.F_{\varrho+1}\ldots.F_{\varrho+n-1})=F_\varrho.d(F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots.F_{\varrho+n-1})$$
$$+F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots..F_{\varrho+n-1}.dF_\varrho$$

ist, so erhalten wir aus (I) die Gleichung:

$$0=F_\varrho.\left(\frac{d(F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}.F_{\varrho+n-1})}{d\xi}.\cot u+\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots F_{\varrho+n-1})}{d\eta}\right)$$
$$+F_{\varrho+1}.F_{\varrho+2}\ldots.F_{\varrho+n-1}.(\cot u-\cot k_\varrho).$$

Wird nun $u=k_\varrho$ angenommen, so folgt hieraus

$$0=F_\varrho.\left(\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots.F_{\varrho+n-1})}{d\xi}.\cot k_\varrho+\frac{d(F_{\varrho+1}\ldots F_{\varrho+n-1})}{d\eta}\right)$$

Der zur Richtung $u=k_\varrho$ gehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung ist hiernach ein Aggregat, bestehend aus der geraden Linie

$$F_\varrho = \xi - \eta . \cot k_\varrho + l_\varrho = 0$$

und aus der Linie der $(n-2)$ten Ordnung, welcher die Gleichung

$$0 = \frac{d(F_{\varrho+1} \dots F_{\varrho+n-1})}{d\xi} . \cot k_\varrho + \frac{d(F_{\varrho+1} \dots F_{\varrho+n-1})}{d\eta} \qquad \text{(II.)}$$

angehört. Die Linie $F_\varrho = 0$ ist ein Bestandtheil von L, und enthält daher $n-1$ Doppelpunkte; die übrigen Doppelpunkte so wie die Punkte P müssen also in der Linie (II) liegen.

Hiernach reichen zwei, nach der Vorschrift des Satzes (II) gebildete Linien hin, um die Punkte P zu bestimmen. Ihrer Gleichung zufolge wird aber eine Linie (II) auf folgende Weise gefunden: man betrachtet irgend welche $n-1$ Linien oder Bestandtheile des Gebildes L als ein besonderes Aggregat, und sucht für dieses einen Diameter der $(n-2)$ten Ordnung, und zwar jenen, welcher zur Richtung der $n$ten, in das neue Aggregat nicht aufgenommenen Linie von L gehört.

Ich wende mich nun zur Bestimmung der Punkte P mittelst Zeichnung.

Zunächst kommt es auf die Gewinnung derjenigen Mittel an, durch welche die Auflösung einer Aufgabe möglich wird, welche so lautet:

> Das aus n geraden Linien zusammengesetzte Gebilde L werde von mehreren, zu einander parallelen Transversalen $TT'T''$ ... durchschnitten, und zwar von T in den Punkten $A_1 A_2 \dots A_n$, von T' in den Punkten $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, von T'' in den Punkten $A''_1 A''_2 \dots A''_n$, u. s. w.; man soll in jeder von diesen Transversalen TT'..... jene Punkte angeben, durch welche der, zur Richtung dieser Transversalen gehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung gehen muss.

Behufs der Auflösung dieser Aufgabe bezeichnen wir vorläufig durch O einen von jenen Punkten, welche die Transversale T mit dem gesuchten Diameter gemein hat, eben so durch O' einen von jenen Punkten, welche T' mit dem Diameter gemein hat, u. s. w. Unter dieser Voraussetzung hat man als Anhalt die Gleichungen:

$$0 = (OA_1 \; OA_2 \dots OA_n)^{(n-1)},$$

$$0 = (O'A'_1 \; O'A'_2 \dots O'A'_n)^{(n-1)},$$

$$0 = (O''A''_1 \; O''A''_2 \dots O''A''_n)^{(n-1)},$$

. . . .

Man wähle, nach Willkühr, in T einen Punkt X, in T' einen Punkt X', in T'' einen Punkt X'', u. s. w., so ist, algebraisch genommen,

$$OA_r = XA_r - XO, \quad O'A'_r = X'A'_r - X'O',$$
$$O''A''_r = X''A''_r - X''O'', \ldots\ldots$$

Führt man die hieraus sich ergebenden Werthe für OA_1, $OA_2, \ldots.$ in den vorangehenden Gleichungen ein, so ergeben sich folgende Sätze:

$$0 = \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_s}} (-1)^s . XO^{n-s-1} . \frac{(n-1)^{s|-1}}{n^{s|-1}} . (XA_1\, XA_2 \ldots . XA_n)^{(s)},$$

$$0 = \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_s}} (-1)^s . X'O'^{n-s-1} . \frac{(n-1)^{s|-1}}{n^{s|-1}} . (X'A'_1\, X'A'_2 \ldots X'A'_n)^{(s)},$$

u. s. w.

Die Punkte $A_1 A_2 \ldots.,$ $A'_1 A'_2 \ldots.$ sind in jedem Falle gegeben; da nun die Punkte $X\,X' \ldots.$ durch beliebige Annahme festgestellt werden, so sind in jedem Falle die Segmente XA_1, $XA_2, \ldots\ldots.,$ $X'A'_1$, $X'A'_2 \ldots.$ ebenfalls gegeben. Die vorstehenden Gleichungen geben also direct die Werthe der Grössen XO, $X'O' \ldots.$ Es ergeben sich aber für jede dieser Grössen $n-1$ Werthe, und durch diese sind in jeder Transversalen diejenigen $n-1$ Punkte bestimmt, durch welche der zugehörige Diameter der $(n-1)$ten Ordnung geht.

Die Auflösung der vorstehenden Gleichungen wird vereinfacht, wenn man die Punkte $X\,X' \ldots.$ so wählt, dass

$$\left.\begin{array}{l} (XA_1\;\; XA_2 \ldots\ldots XA_n)^{(1)} = 0 \\ (X'A'_1\; X'A'_2 \ldots X'A'_n)^{(1)} = 0 \\ \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Unter dieser Bedingung liegen die Punkte $X\,X'\,X'' \ldots\ldots$ in einer geraden Linie, in dem zur Richtung der Transversalen $T\,T'\,T'' \ldots.$ gehörigen Diameter erster Ordnung des Gebildes L; es werden daher durch zwei Punkte XX' die übrigen bestimmt. Um aber diese zwei Punkte zu finden, nehme man, nach Willkühr, in T einen Punkt U und in T' einen Punkt U' an, und bemerke, dass

$$XA_r = UA_r - UX, \quad X'A'_r = U'A'_r - U'X'$$

ist, so fällt in die Augen, dass den Gleichungen (III) gemäss siein muss

$$\left.\begin{array}{l} n . UX = UA_1 + UA_2 + \ldots\ldots + UA_n \\ n . U'X' = U'A'_1 + U'A'_2 + \ldots\ldots + U'A'_n \end{array}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

In Folge der Annahmen (III) fallen in den obigen Gleichungen für XO, $X'O'$,... die zweiten Glieder weg, und man hat demnach

$$\begin{aligned}0=n.XO^{n-1}&+(n-2).XO^{n-3}.(XA_1\quad XA_2\ldots.XA_n)^{(2)}\\&-(n-3).XO^{n-4}.(XA_1\quad XA_2\ldots.XA_n)^{(3)}\\&+(n-4).XO^{n-5}.(XA_1\quad XA_2\ldots.XA_n)^{(4)}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und eben solche Gleichungen für $X'O'$, $X''O''$,....

Wegen (III) ist aber auch

$$-2.(XA_1\quad XA_2\ldots XA_n)^{(2)}=XA_1^2+XA_2^2+\ldots.+XA_n^2,$$

$$+3.(XA_1\quad XA_2\ldots XA_n)^{(3)}=XA_1^3+XA_2^3+\ldots.+XA_n^3,$$

$$\begin{aligned}-8.(XA_1\quad XA_2\ldots XA_n)^{(4)}&=2.(XA_1^4+XA_2^4+\ldots+XA_n^4)\\&\quad-(XA_1^2+XA_2^2+\ldots+XA_n^2)^2,\end{aligned}$$

u. s. w.

mithin

$$\begin{aligned}0=XO^{n-1}&-\frac{n-2}{2.n}.XO^{n-3}.(XA_1^2+XA_2^2+\ldots.+XA_n^2)\qquad\text{(V)}\\&-\frac{n-3}{3.n}.XO^{n-4}.(XA_1^3+XA_2^3+\ldots.+XA_n^3)\\&-\frac{n-4}{8.n}.XO^{n-5}.\left\{\begin{matrix}2.(XA_1^4+XA_2^4+\ldots+XA_n^4)\\-(XA_1^2+XA_2^2+\ldots+XA_n^2)^2\end{matrix}\right\}\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Die Coefficienten dieser Gleichung lassen sich nun leicht auf diejenige Form bringen, welche für die Auflösung am passendsten ist.

Man zeichne (Taf. I. Fig. 6.) einen Winkel ZXQ von beliebiger Grösse, nehme auf dem einen Schenkel, von der Spitze X ab gerechnet, ein Stück XZ von beliebiger Grösse, und trage dann, ebenfalls von X ab, auf jedem Schenkel eines der Segmente auf. Angenommen, es sei das Segment XA_r auf jedem Schenkel aufgetragen, und dadurch auf dem einen Schenkel der Punkt A_r, auf dem anderen der Punkt Q bestimmt, also $XQ=XA_r$, so verbinde man Z mit Q, und ziehe durch A_r die Linie $A_rZ_r^{(1)}$ parallel zu ZQ; ferner verbinde man Z mit $Z_r^{(1)}$, und ziehe, parallel zu $ZZ_r^{(1)}$, durch A_r die Linie $A_rZ_r^{(2)}$; weiterhin verbinde man Z mit $Z_r^{(2)}$, und ziehe wieder durch A_r die neue Linie $A_rZ_r^{(3)}$ parallel zu $ZZ_{r(2)}$; u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung hat man zwischen dem Segmente XA_r, der willkührlichen Länge XZ, und den Stücken $XZ_r^{(1)}$, $XZ_r^{(2)}, \ldots XZ_r^{(\varrho)}$ folgende Gleichungen:

$$XA_r . XA_r = XZ . XZ_r^{(1)},$$

$$XA_r . XZ_r^{(1)} = XZ . XZ_r^{(2)},$$

$$XA_r . XZ_r^{(2)} = XZ . XZ_r^{(3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$XA_r . XZ_r^{(\varrho-1)} = XZ . XZ_r^{(\varrho)};$$

und wenn man diese durch Multiplication verbindet, so ergiebt sich der Satz:

$$XA_r^{\varrho+1} = XZ^{\varrho} . XZ_r^{(\varrho)}.$$

Verfährt man also in Bezug auf jedes der Segmente $XA_1, \ldots$ in der angegebenen Weise, behält aber die willkührliche Länge XZ unverändert bei, und sucht nur die entsprechenden Stücke $XZ_1^{(\varrho)}$, $XZ_2^{(\varrho)}, \ldots\ldots$, so ergiebt sich für die Uebertragung der Summe gleicher Potenzen von den Segmenten XA_1, $XA_2 \ldots$ die Norm:

$$XA_1^{\varrho+1} + \ldots + XA_n^{\varrho+1} = XZ^{\varrho} . (XZ_1^{(\varrho)} + XZ_2^{(\varrho)} + \ldots + XZ_n^{(\varrho)}),$$

wobei zu bemerken, dass in der Summe

$$XZ_1^{(\varrho)} + XZ_2^{(\varrho)} + \ldots + XZ_n^{(\varrho)}$$

das Stück $XZ_r^{(\varrho)}$ eben das Zeichen $+$ oder $-$ erhält, welches der Potenz $XA_r^{\varrho+1}$ zukommt.

Diese Reductionsart in ihrer Anwendung auf die Coefficienten der obigen Gleichung (V) für XO führt dahin, dass jeder Coefficient durch einen Ausdruck von der Form

$$XZ^{\varrho} . \lambda$$

ersetzt werden kann, wo λ eine einfache Linie von bestimmter Länge ist, und die Gleichung für XO, wenn man $XZ = p$ setzt, in Rücksicht auf Form und Beschaffenheit der Coefficienten folgende wird:

$$0 = XO^{n-1} - p.a.XO^{n-3} - p^2.b.XO^{n-4} - p^3.c.XO^{n-5} - \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Es kommt schliesslich darauf an, die Wurzeln dieser Gleichung durch Zeichnung zu finden.

Zu diesem Ende betrachtet man die Gleichung (V) als dadurch entstanden, dass aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen x y die eine dieser Grössen eliminirt worden. Ist

die eine dieser Gleichungen vom $m$ten, die andere vom m'ten Grade, so wird die aus der Elimination hervorgehende Gleichung vom $m.m'$ten Grade, oder auch vom $(m.m'-1)$ten, wenn der Coefficient des letzten Gliedes $=0$ ist. Man hat also vor Allem die Werthe von m und m' so festzusetzen, dass $m.m'$ entweder $=n-1$, oder doch $=n$ wird. Die Coefficienten der einen und der anderen Gleichung sind aber so zu wählen, dass das Resultat der Elimination mit (VI) einerlei wird.

Jede dieser zwei Gleichungen betrachtet man nun als einer krummen Linie angehörig, in der Weise aber, dass die Coordinatenaxen der einen zugleich die Axen der anderen Linie sind. Diese Linien zeichnet man so weit als nöthig, um die Durchschnittspunkte derselben zu finden. Von den Coordinaten dieser Durchschnittspunkte sind die zu einer Axe gehörigen zugleich die Werthe von XO, und zwar die x oder die y, je nachdem y oder x durch Elimination entfernt werden muss, um die Gleichung (VI) als Resultat zu erhalten.

Die nöthigen Constructionen gestalten sich in der Anwendung ziemlich einfach. Zunächst ist klar, dass man die willkührliche Linie $XZ=p$ für alle Transversalen $TT'T''$..... unverändert beibehalten kann. Ferner kann man, wenn $XO=y$ gesetzt wird, als die eine der beiden Gleichungen folgende nehmen

$$0=y^2-px,$$

so dass man für alle Transversalen auch mit einer einzigen Parabel ausreicht, und nur noch die zu jeder Transversalen gehörige zweite krumme Linie zu bestimmen bleibt.

Zur Erläuterung mag die Betrachtung einiger Fälle folgen.

Erster Fall. Wenn $n=3$ ist, so erhält man aus (VI)

$$0=XO^2-p.a.$$

In diesem Falle ist das Product $p.a$ durch ein Quadrat h^2 zu ersetzen, und es sind dann $+h$ und $-h$ die Werthe von XO.

Zweiter Fall. Wenn $n=4$ ist, so wird

$$0=XO^3-p.a.XO-p^2.b.$$

Diese Gleichung ist, wenn man $XO=y$ setzt, das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen:

$$0=y^2-p.x,$$

$$0=x^2+y^2-(p+a)x-b.y;$$

von welchen die zweite einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt eine solche Lage hat, dass

$$\text{seine Abscisse } (x) = \frac{p+a}{2},$$

$$\text{„ Ordinate } (y) = \frac{b}{2}.$$

Der Kreis geht durch den Scheitel der Parabel, von dem ab die Coordinaten gezählt werden; daher ist

$$\text{der Radius des Kreises} = \sqrt{\left(\frac{(p+a)^2+b^2}{4}\right)}.$$

Dritter Fall. Wenn $n=5$ ist, also nach (VI) die aufzulösende Gleichung

$$0 = XO^4 - p.a.XO^2 - p^2.b.XO - p^3.c,$$

so sind die Hülfsgleichungen:

$$0 = y^2 - p.x,$$

$$0 = x^2 + y^2 - (p+a)x - b.y - p.c;$$

die zweite gehört wieder einem Kreise an, von dessen Mittelpunkt

$$\text{die Abscisse } (x) = \frac{p+a}{2},$$

$$\text{„ Ordinate } (y) = \frac{b}{2}$$

ist, und dessen Radius

$$= \sqrt{\left(\frac{(p+a)^2+b^2}{4} + p.c\right)}.$$

Vierter Fall. Die zu $n=6$ gehörige Gleichung

$$0 = XO^5 - p.a.XO^3 - p^2.b.XO^2 - p^3.c.XO - p^4.d$$

ist, wenn man $XO = y$ setzt, das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen

$$0 = y^2 - p.x,$$

$$0 = x^3 - ax^2 - bxy - p.c.x - p.d.y$$

u. s. w.

In Taf. II. Fig. 1. ist ein Aggregat von vier geraden Linien AA', BB', CC', DD' vorausgesetzt, welche alle einander durchschneiden. Ein solches Gebilde hat neun Mittelpunkte, unter diesen aber nur drei, welche nicht zugleich Doppelpunkte sind.

Behufs der Bestimmung dieser Punkte sind zwei Diameter dritter Ordnung des Gebildes zu Hülfe genommen, und zwar jene, welche zu den Richtungen der Linien AA' und BB' gehören. Der erste von diesen Diametern besteht aus der Linie AA' und aus dem zur Richtung von AA' gehörigen Diameter zweiter Ordnung des Aggregates der Linien BB', CC', DD'; der zweite besteht aus der Linie BB' und aus dem zur Richtung von BB' gehörigen Diameter zweiter Ordnung des Aggregates der Linien AA', CC', DD'. Die erwähnten Diameter zweiter Ordnung sind Hyperbeln, und zwar sind $\alpha\alpha$ und $\alpha'\alpha'$ die Zweige der einen, $\beta\beta$ und $\beta'\beta'$ die Zweige der anderen Hyperbel. Diese hyperbolischen Zweige durchschneiden einander in den Punkten $P\,P'\,P''$, und diese sind die gesuchten drei Mittelpunkte des vorausgesetzten Gebildes.

Um die genannten Hyperbeln graphisch zu bestimmen, sind zunächst die zu den Richtungen AA' und BB' gehörigen Diameter erster Ordnung aa' und bb' gesucht worden, nach Anleitung der Sätze (IV) für den Fall $n=3$. Der Diameter aa' giebt in jeder zu AA' parallelen Transversalen des Gebildes (BB', CC', DD') unmittelbar den Punkt X an, von welchem ab die verschiedenen Segmente gezählt werden; das Analoge gilt von dem Diameter bb' in Bezug auf die Transversalen des Gebildes (AA', CC', DD').

Angenommen, das Gebilde (BB', CC', DD') werde von einer zu AA' parallelen Transversalen in den Punkten $A_1\,A_2\,A_3$ geschnitten, so hat man, weil X in aa' liegt,

$$XA_1+XA_2+XA_3=0$$

und nach (V)

$$0=XO^2-\frac{1}{6}.(XA_1^2+XA_2^2+XA_3^2).$$

Sind nun die Punkte $A_1\,A_2\,A_3$ von einander verschieden, so sucht man durch Zeichnung die Hypotenuse L des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten

$$XA_1 \text{ und } \sqrt{(XA_2^2+XA_3^2)}$$

sind, sucht ferner den sechsten Theil L' von L, und bestimmt endlich die Hypotenuse λ des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten einander gleich, jeder aber $=L'.\sqrt{3}$, so wird

$$XO^3-\lambda^2=0, \text{ d. i. } XO=\pm\lambda.$$

Fallen von den drei Punkten $A_1\,A_2\,A_3$ zwei zusammen, d. h. geht die Transversale durch einen Doppelpunkt des Gebildes

(BB', CC', DD'), so ist keinerlei Zeichnung nöthig. Wenn nämlich $XA_2 = XA_3 = \lambda$ ist, so ist, ohne Rücksicht auf Vorzeichen, $XA_1 = 2\lambda$, folglich

$$XO^2 - \lambda^2 = 0.$$

Das in Bezug auf den Diameter des Gebildes (BB', CC', DD') Bemerkte gilt auch, mutatis mutandis, für das Gebilde (AA', CC', DD').

In Bezug auf die Lage der Punkte P P' P'' ist noch Folgendes zu bemerken. Durch die Linien AA', BB', CC', DD' werden drei Flächenstücke bestimmt, zwei Dreiecke und ein Viereck, welche neben einander liegen, so dass keines als Theil des anderen genommen werden kann. In jedem dieser Flächenstücke liegt aber einer von den Punkten P P' P''.

An einem Gebilde von fünf geraden Linien, welche alle einander durchschneiden, und zwar in 10 verschiedenen Punkten, kann man sechs solcher Flächenstücke unterscheiden, welche neben oder ausser einander liegen, und in jedem dieser Flächenstücke hat einer von den sechs Mittelpunkten, welche dem Gebilde zukommen, seine Stelle.

Aehnliches gilt von der Lage der Mittelpunkte eines Gebildes von sechs und mehr geraden Linien.

II.

Einige Bemerkungen über loxodromische Dreiecke im Allgemeinen.

Von

dem Herausgeber.

In meiner „Loxodromischen Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik. Leipzig. 1849." habe ich nur solche loxodromische Dreiecke betrachtet, die auf der Oberfläche des Erdellipsoids von einer loxodromischen Linie und den beiden zwischen deren Endpunkten und dem positiven Pole des Erdellipsoids liegenden Meridianbogen begränzt werden. Dies ist ganz mit Absicht geschehen, weil nur solche loxodromische Dreiecke in der Nautik zur Betrachtung kommen und für den praktischen Gebrauch in derselben von Wichtigkeit sind, ich aber dabei auch die Analogie mit der Sphäroidischen Trigonometrie im Auge hatte, wo man zunächst auch nur solche Dreiecke zu betrachten pflegt, welche auf der Oberfläche des Erdellipsoids von einer geodätischen oder kürzesten Linie und den beiden zwischen deren Endpunkten und dem positiven Pole des Erdellipsoids liegenden Meridianbogen begränzt werden. So wie man aber namentlich in neuerer Zeit bekanntlich viele merkwürdige Untersuchungen über von drei geodätischen oder kürzesten Linien begränzte Dreiecke angestellt hat, so führt auch die Betrachtung von Dreiecken, welche auf der Oberfläche des Erdellipsoids von drei loxodromischen Linien eingeschlossen werden, zu manchen nicht ganz uninteressanten Resultaten, die aber für die nautische Praxis keine Bedeutung haben, und daher der Tendenz meiner oben genannten, namentlich auch für wissenschaftlich gebildete Seeleute bestimmten, und deshalb vorzugsweise nur das auf der See Anwendbare gebenden Schrift fern lagen. Des theoretischen Interesses wegen will ich aber in dem vorliegenden Aufsatze einige Eigenschaften

solcher allgemeineren, von drei loxodromischen Linien auf der Oberfläche des Erdellipsoids eingeschlossenen loxodromischen Dreiecke entwickeln, und werde mich freuen, wenn dadurch vielleicht einer oder der andere Leser des Archivs diesem Gegenstande weiter nachzugehen veranlasst werden sollte, da mir selbst jetzt das wirklich in der Praxis Anwendbare näher liegt.

Es mögen daher jetzt A_0, A_1, A_2 drei durch loxodromische Linien auf der Oberfläche des Erdellipsoids verbundene, und daher die Spitzen eines allgemeinen loxodromischen Dreiecks darstellende Punkte sein. Die Längen und Breiten dieser Punkte sollen, indem ich alle in meiner „Loxodromischen Trigonometrie“ gebrauchten Bezeichnungen wenigstens in analoger Weise auch hier beibehalten werde, respective durch L_0, B_0; L_1, B_1; L_2, B_2 bezeichnet werden. Den von einer loxodromischen Linie mit den sämmtlichen Meridianen eingeschlossenen Winkel, welcher nie grösser als 180° und stets so genommen wird, dass er von den Meridianen aus nach der Seite, nach welcher im Aequator die Längen von 0° bis 360° gezählt werden, von der loxodromischen Linie aus nach der Seite des positiven Pols des Erdellipsoids hin liegt, habe ich a. a. O. S. 17. Nr. 4. den Curs genannt. Nach diesem Begriffe sollen im Folgenden die den loxodromischen Linien oder Distanzen

$$A_1 A_2 = s_0, \quad A_2 A_0 = s_1, \quad A_0 A_1 = s_2$$

entsprechenden Curse respective durch Θ_0, Θ_1, Θ_2 bezeichnet werden. Die Längen sollen in der Ordnung L_0, L_1, L_2 im Folgenden aufsteigend oder wachsend geordnet sein.

In Taf. II. Fig. 2. ist, wenn wir uns die Längen von A_0 aus nach der Seite von A_1 und A_2 hin gezählt denken, nach der Grundeigenschaft der loxodromischen Linie offenbar

$$\begin{aligned}\angle A_1 A_0 A_2 &= \Theta_1 - \Theta_2,\\ \angle A_2 A_1 A_0 &= 180^0 - (\Theta_0 - \Theta_2),\\ \angle A_0 A_2 A_1 &= \Theta_0 - \Theta_1\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\angle A_1 A_0 A_2 &= \Theta_2 - \Theta_1,\\ \angle A_2 A_1 A_0 &= 180^0 - (\Theta_2 - \Theta_0),\\ \angle A_0 A_2 A_1 &= \Theta_1 - \Theta_0;\end{aligned}$$

also, wenn man in beiden Fällen addirt:

$$\angle A_1 A_0 A_2 + \angle A_2 A_1 A_0 + \angle A_0 A_2 A_1 = 180^0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die Winkel des loxodromischen Dreiecks $A_0 A_1 A_2$ bloss durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 180^0,$$

welche Eigenschaft also das allgemeine loxodromische Dreieck mit dem ebenen Dreiecke gemein hat.

Ferner ist nach den Formeln 36^a), meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 32.“:

$$L_1 - L_2 = (1-e^2)\tang\Theta_0 \int_{B_2}^{B_1} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)},$$

$$L_2 - L_0 = (1-e^2)\tang\Theta_1 \int_{B_0}^{B_2} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)},$$

$$L_0 - L_1 = (1-e^2)\tang\Theta_2 \int_{B_1}^{B_0} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)}$$

und

$$s_0 = \frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_0} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_1 = -\frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_1} \int_{B_2}^{B_0} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_2 = \frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta_2} \int_{B_0}^{B_1} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}};$$

oder

$$(L_1 - L_2)\cot\Theta_0 = (1-e^2) \int_{B_2}^{B_1} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)},$$

$$(L_2 - L_0)\cot\Theta_1 = (1-e^2) \int_{B_0}^{B_2} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)},$$

$$(L_0 - L_1)\cot\Theta_2 = (1-e^2) \int_{B_1}^{B_0} \frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}\,(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)};$$

und

$$s_0\cos\Theta_0 = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_1\cos\Theta_1 = -a(1-e^2) \int_{B_2}^{B_0} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_2\cos\Theta_2 = a(1-e^2) \int_{B_0}^{B_1} \frac{\partial\overline{\omega}}{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also ist, wie man sogleich durch Addition findet:

$$(L_1-L_2)\cot\Theta_0+(L_2-L_0)\cot\Theta_1+(L_0-L_1)\cot\Theta_2=0$$

und

$$s_0\cos\Theta_0-s_1\cos\Theta_1+s_2\cos\Theta_2=0$$

oder

$$s_0\cos\Theta_0+s_2\cos\Theta_2=s_1\cos\Theta_1,$$

wo man auch die Analogie dieser letzten Gleichung mit einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie sogleich erkennen wird.

Ferner ist nach der Formel 52) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 39.“:

$$L_1-L_2=\operatorname{tang}\Theta_0\left\{\begin{array}{c}l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}\\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)}\end{array}\right\},$$

$$L_2-L_0=\operatorname{tang}\Theta_1\left\{\begin{array}{c}l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}\\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)}\end{array}\right\},$$

$$L_0-L_1=\operatorname{tang}\Theta_2\left\{\begin{array}{c}l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}\\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)}\end{array}\right\};$$

also durch Addition:

$$0=\operatorname{tang}\Theta_0\left\{\begin{array}{c}l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}\\ -\frac{1}{2}el\dfrac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)}\end{array}\right\}$$

$$+\operatorname{tang}\Theta_1\left\{\begin{array}{l} l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)} \\ -\frac{1}{2}e\,l\dfrac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)} \end{array}\right\}$$

$$+\operatorname{tang}\Theta_2\left\{\begin{array}{l} l\dfrac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)} \\ -\frac{1}{2}e\,l\dfrac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)} \end{array}\right\}.$$

Für $e=0$, d. h. für den Fall der Kugel, ist:

$$L_1-L_2=\operatorname{tang}\Theta_0\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)},$$

$$L_2-L_0=\operatorname{tang}\Theta_1\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)},$$

$$L_0-L_1=\operatorname{tang}\Theta_2\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)};$$

und wenn man addirt:

$$0=\operatorname{tang}\Theta_0\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}+\operatorname{tang}\Theta_1\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}$$

$$+\operatorname{tang}\Theta_2\,l\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}B_1)},$$

oder

$$0=(\mathrm{tag}\,\Theta_0-\mathrm{tang}\,\Theta_1)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_2)$$

$$+(\mathrm{tang}\,\Theta_1-\mathrm{tang}\,\Theta_2)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_0)$$

$$+(\mathrm{tang}\,\Theta_2-\mathrm{tang}\,\Theta_0)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_1),$$

oder

$$0=\sin(\Theta_0-\Theta_1)\cos\Theta_2\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_2)$$

$$+\sin(\Theta_1-\Theta_2)\cos\Theta_0\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_0)$$

$$+\sin(\Theta_2-\Theta_0)\cos\Theta_1\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_1).$$

Für $e=0$, d. i. für den Fall der Kugel, ist auch nach der Formel 63) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 41.“

$$s_0=\quad a(B_2-B_1)\sec\Theta_0,$$
$$s_1=-a(B_0-B_2)\sec\Theta_1,$$
$$s_2=\quad a(B_1-B_0)\sec\Theta_2;$$

woraus:

$$\cos\Theta_0=\frac{a(B_2-B_1)}{s_0},\ \cos\Theta_1=-\frac{a(B_0-B_2)}{s_1},\ \cos\Theta_2=\frac{a(B_1-B_0)}{s_2};$$

also nach dem Obigen:

$$0=\frac{B_1-B_0}{s_2}\sin(\Theta_0-\Theta_1)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_2)$$

$$+\frac{B_2-B_1}{s_0}\sin(\Theta_1-\Theta_2)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_0)$$

$$-\frac{B_0-B_2}{s_1}\sin(\Theta_2-\Theta_0)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_1)$$

oder

$$\frac{B_0-B_2}{s_1}\sin(\Theta_2-\Theta_0)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_1)$$

$$=\frac{B_2-B_1}{s_0}\sin(\Theta_1-\Theta_2)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_0)$$

$$+\frac{B_1-B_0}{s_2}\sin(\Theta_0-\Theta_1)\,\mathrm{l\,tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}B_2)$$

folgt.

Wir wollen jetzt auch den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke, die auf der Oberfläche einer Kugel liegen, bestimmen, und in dieser Beziehung zuerst bloss solche loxodromische Dreiecke betrachten, welche von einer loxodromischen Linie und zwei durch deren Endpunkte und den positiven Pol der Kugel gehenden Meridianbogen eingeschlossen werden.

Der Flächeninhalt der der Breite $\overline{\omega}$ entsprechenden sphärischen Calotte ist nach bekannten Elementarsätzen von der Kugel, wenn wir den Halbmesser der Kugel wie früher durch a bezeichnen:

$$2a^2\pi - 2a\pi . a\sin\overline{\omega} = 2a^2\pi(1-\sin\overline{\omega})$$

$$= 2a^2\pi\{1-\cos(90^0-\overline{\omega})\} = 4a^2\pi\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2.$$

Sind nun ω, $\overline{\omega}$ die Länge und Breite des Endpunkts (in dem Sinne der Richtung genommen, nach welcher die Längen gezählt werden) der das loxodromische Dreieck von der obigen Beschaffenheit, dessen Flächeninhalt wir durch S bezeichnen wollen, theilweise begränzenden loxodromischen Linie; so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung sehr leicht, dass mit desto grösserer Genauigkeit, je näher $\Delta\omega$ und $\Delta\overline{\omega}$ der Null kommen,

$$\Delta S = 4a^2\pi\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2 . \frac{\Delta\omega}{2\pi} - \frac{1}{2} . r\cos\overline{\omega}\,\Delta\omega . r\Delta\overline{\omega}$$

oder

$$\Delta S = 2a^2\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2\Delta\omega - \frac{1}{2}r^2\cos\overline{\omega}\,\Delta\omega\,\Delta\overline{\omega},$$

also

$$\frac{\Delta S}{\Delta\overline{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2\frac{\Delta\omega}{\Delta\overline{\omega}} - \frac{1}{2}r^2\cos\overline{\omega}\,\Delta\omega$$

ist. Lässt man nun $\Delta\overline{\omega}$ sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, so erhält man auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial\overline{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\omega}}.$$

Weil nun aber nach der Formel 26) meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 28." im Falle der Kugel, d. h. für $a=b$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\omega}} = \frac{\tan\Theta}{\cos\overline{\omega}}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial S}{\partial\overline{\omega}} = 2a^2\sin(45^0-\frac{1}{2}\overline{\omega})^2\frac{\tan\Theta}{\cos\overline{\omega}},$$

oder

$$\partial S = 2a^2 \operatorname{tang} \Theta \frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2}{\cos\varpi} \partial\varpi,$$

wo natürlich Θ eine constante Grösse ist. Also ist, wenn B, B_1 die Breiten der beiden Endpunkte der das loxodromische Dreieck theilweise begränzenden loxodromischen Linie sind,

$$S = 2a^2 \operatorname{tang} \Theta \int_B^{B_1} \frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2}{\cos\varpi} \partial\varpi,$$

oder, weil nach dem Obigen

$$\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin\varpi),$$

also

$$\frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2}{\cos\varpi} = \frac{1}{2}(\sec\varpi - \operatorname{tang}\varpi)$$

ist:

$$S = a^2 \operatorname{tang} \Theta \left(\int_B^{B_1} \sec\varpi\,\partial\varpi - \int_B^{B_1} \operatorname{tang}\varpi\,\partial\varpi \right).$$

Nun ist aber

$$\int \sec\varpi\partial\varpi = \int \frac{\cos\varpi\partial\varpi}{1 - \sin\varpi^2} = \int \frac{\partial\sin\varpi}{1 - \sin\varpi^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{\partial\sin\varpi}{1 + \sin\varpi} + \int \frac{\partial\sin\varpi}{1 - \sin\varpi} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \{ l(1 + \sin\varpi) - l(1 - \sin\varpi) \}$$

$$= \frac{1}{2} l \frac{1 + \sin\varpi}{1 - \sin\varpi} = \frac{1}{2} l \frac{\cos(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2}{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varpi)^2}$$

$$= l \cot(45^0 - \frac{1}{2}\varpi) = l \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\varpi)$$

und

$$\int \operatorname{tang}\varpi\partial\varpi = -\int \frac{\partial \cos\varpi}{\cos\varpi} = -\mathrm{l}\cos\varpi;$$

also

$$\int_B^{B_1} \sec\varpi\,\partial\varpi = \mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B)},$$

$$\int_B^{B_1} \operatorname{tang}\varpi\,\partial\varpi = -\mathrm{l}\,\frac{\cos B_1}{\cos B};$$

folglich nach dem Obigen

$$S = a^2 \operatorname{tang}\Theta \left\{ \mathrm{l}\,\frac{\cos B_1}{\cos B} + \mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B)} \right\}$$

oder

$$S = a^2 \operatorname{tang}\Theta\,\mathrm{l}\,\frac{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\cos B \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B)}.$$

Es ist aber auch

$$\cos B = \sin(90^0 + B) = 2\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}B)\cos(45^0 + \tfrac{1}{2}B),$$

$$\cos B_1 = \sin(90^0 + B_1) = 2\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1)\cos(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1);$$

folglich

$$\cos B \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}B) = 2\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}B)^2,$$

$$\cos B_1 \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1) = 2\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}B_1)^2;$$

und daher nach dem Obigen:

$$S = 2a^2 \operatorname{tang}\Theta\,\mathrm{l}\,\frac{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B)}$$

oder

$$S = 2a^2 \operatorname{tang} \Theta \, \mathrm{l} \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2} B_1)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2} B)}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Flächeninhalt des loxodromischen Dreiecks $A_0 A_1 A_2$ in Taf. II. Fig. 3. durch F, so ist in dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle nach dem Vorhergehenden:

$$F = a^2 \operatorname{tang} \Theta_1 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_2 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}{\cos B_0 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}$$

$$- a^2 \operatorname{tang} \Theta_0 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_2 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}$$

$$- a^2 \operatorname{tang} \Theta_2 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\cos B_0 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)},$$

also, wie sogleich in die Augen fällt:

$$F = a^2 \left\{ \operatorname{tang} \Theta_0 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \operatorname{tang} \Theta_1 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \operatorname{tang} \Theta_2 \, \mathrm{l} \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\}$$

$$- a^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} \Theta_0 \, \mathrm{l} \dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_2)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)} \\[2ex] + \operatorname{tang} \Theta_1 \, \mathrm{l} \dfrac{\operatorname{taug}(45^\circ + \frac{1}{2} B_0)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_2)} \\[2ex] + \operatorname{tang} \Theta_2 \, \mathrm{l} \dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_0)} \end{array} \right\}.$$

Nach dem Obigen verschwindet aber der ganze zweite, abgezogene, Theil, und es ist also:

$$F=a^2\left\{\operatorname{tang}\Theta_0 \operatorname{l}\frac{\cos B_1}{\cos B_2}+\operatorname{tang}\Theta_1 \operatorname{l}\frac{\cos B_2}{\cos B_0}+\operatorname{tang}\Theta_2 \operatorname{l}\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right\}.$$

Auch findet man mittelst des Obigen sogleich:

$$F=2a^2\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\Theta_0 \operatorname{l}\dfrac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}\\[2ex] +\operatorname{tang}\Theta_1 \operatorname{l}\dfrac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}\\[2ex] +\operatorname{tang}\Theta_2 \operatorname{l}\dfrac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}\end{array}\right\},$$

oder

$$F=2a^2\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\Theta_0 \operatorname{l}\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}\\[2ex] +\operatorname{tang}\Theta_1 \operatorname{l}\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}\\[2ex] +\operatorname{tang}\Theta_2 \operatorname{l}\dfrac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}\end{array}\right\}.$$

In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist auf ganz ähnliche Weise:

$$F=a^2\operatorname{tang}\Theta_0 \operatorname{l}\frac{\cos B_2 \operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}$$

$$+a^2\operatorname{tang}\Theta_2 \operatorname{l}\frac{\cos B_1 \operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\cos B_0 \operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}$$

$$-a^2 \operatorname{tang}\Theta_1 \, l \frac{\cos B_2 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\cos B_0 \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)},$$

also, wie sogleich erhellet:

$$F = -a^2 \left\{ \operatorname{tang}\Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \operatorname{tang}\Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \operatorname{tang}\Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\}$$

$$+ a^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\Theta_0 \, l \dfrac{\operatorname{tang}(45_0 + \frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} \\ + \operatorname{tang}\Theta_1 \, l \dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)} \\ + \operatorname{tang}\Theta_2 \, l \dfrac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_0)} \end{array} \right\},$$

also, weil nach dem Obigen der zweite Theil verschwindet:

$$F = -a^2 \left\{ \operatorname{tang}\Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \operatorname{tang}\Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \operatorname{tang}\Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\}.$$

Auch findet man mittelst des Obigen sogleich:

$$F = -2a^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\Theta_0 \, l \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_2)} \\ + \operatorname{tang}\Theta_1 \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} \\ + \operatorname{tang}\Theta_2 \, l \dfrac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} \end{array} \right\}$$

oder

$$F = -2a^2 \left\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_2)} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_0)} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}B_1)} \right\}.$$

Folglich ist, wenn man nur immer das Zeichen so nimmt, dass F positiv wird, allgemein:

$$F = \pm a^2 \left\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\},$$

oder

$$F = \pm 2a^2 \left\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)} \right\}$$

oder

$$F=\pm 2a^2\left\{\operatorname{tang}\Theta_0 \, \mathrm{l}\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}\right.$$

$$+\operatorname{tang}\Theta_1 \, \mathrm{l}\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_2)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}$$

$$\left.+\operatorname{tang}\Theta_2 \, \mathrm{l}\frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_0)}{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}B_1)}\right\}.$$

Auch ist

$$F=\pm a^2\left\{\mathrm{l}.\left(\frac{\cos B_1}{\cos B_2}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_0}+\mathrm{l}.\left(\frac{\cos B_2}{\cos B_0}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_1}+\mathrm{l}.\left(\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_2}\right\}.$$

oder

$$F=\pm a^2 \mathrm{l}\left\{\left(\frac{\cos B_1}{\cos B_2}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_0}\left(\frac{\cos B_2}{\cos B_0}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_1}\left(\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right)^{\operatorname{tang}\Theta_2}\right\},$$

oder

$$F=\pm a^2 \mathrm{l}\left\{\cos B_0^{\operatorname{tg}\Theta_2-\operatorname{tg}\Theta_1}\cos B_1^{\operatorname{tg}\Theta_0-\operatorname{tg}\Theta_2}\cos B_2^{\operatorname{tg}\Theta_1-\operatorname{tg}\Theta_0}\right\},$$

oder

$$F=\pm a^2 \mathrm{l}\left\{\cos B_0^{\frac{\sin(\Theta_2-\Theta_1)}{\cos\Theta_2\cos\Theta_1}}\cos B_1^{\frac{\sin(\Theta_0-\Theta_2)}{\cos\Theta_0\cos\Theta_2}}\cos B_2^{\frac{\sin(\Theta_1-\Theta_0)}{\cos\Theta_1\cos\Theta_0}}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}\Theta_0=\frac{L_1-L_2}{\mathrm{l}\dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}},$$

$$\operatorname{tang}\Theta_1=\frac{L_2-L_0}{\mathrm{l}\dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}},$$

$$\operatorname{tang}\Theta_2 = \frac{L_0 - L_1}{l\,\dfrac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}}$$

ist, so ist auch

$$F = \pm 2a^2 \left\{ (L_0 - L_1)\frac{l\,\dfrac{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}}{l\,\dfrac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}} + (L_1 - L_2)\frac{l\,\dfrac{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_2)}}{l\,\dfrac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_2)}} + (L_2 - L_0)\frac{l\,\dfrac{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_2)}{\sin(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}}{l\,\dfrac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}} \right\}$$

oder

$$F=\pm 2a^2\left\{(L_0-L_1)\frac{\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)-\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)-\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}\right.$$

$$+(L_1-L_2)\frac{\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)-\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}{\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)-\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)}$$

$$\left.+(L_2-L_0)\frac{\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)-\operatorname{l}\sin(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}{\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_2)-\operatorname{l}\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}\right\}$$

Durch diese bemerkenswerthe Formel wird also der Flächeninhalt des loxodromischen Dreiecks auf der Kugel bloss durch die Längendifferenzen und die Breiten seiner drei Spitzen ausgedrückt.

Ich will jetzt diese Betrachtungen, ungeachtet ihres theoretischen Interesses, nicht weiter fortsetzen, weil sie eine praktische Anwendung nicht darbieten, bemerke aber noch, dass sich auch der Flächeninhalt eines allgemeinen loxodromischen Dreiecks auf der Oberfläche eines Ellipsoids ganz auf ähnliche Art wie vorher bei loxodromischen Dreiecken auf der Kugel ermitteln lassen würde; indess können die Integrale, auf welche diese Untersuchung führt, nur durch unendliche Reihen dargestellt werden, und ich will daher die Mittheilung derselben lieber einem spätern besondern Aufsatze vorbehalten, wenn es mir gelungen sein wird, durch das Vorhergehende das Interesse der Leser für diese Untersuchungen vielleicht einigermaassen in Anspruch zu nehmen.

III.

Ueber die Aufstellung des Messtisches über einem auf der Erde gegebenen Punkte.

Von dem

Herausgeber.

Der Gebrauch des Messtisches erfordert bekanntlich fast immer, denselben so aufzustellen, dass ein auf dem Tische gegebener Punkt lothrecht über einem auf der Erde gegebenen Punkte sich befindet, dabei aber auch zugleich der Tisch horizontal steht, und eine durch den auf dem Tische gegebenen Punkt gehende gegebene gerade Linie auf dem Tische nach einem zweiten auf der Erde gegebenen Punkte gerichtet ist. Zur Lösung dieser Aufgabe bedient man sich bekanntlich des einfachen Instruments, welches man eine Einloth-Gabel oder Einloth-Zange zu nennen pflegt. Wer aber mit der Messtisch-Praxis gehörig vertraut ist, wird mir hoffentlich darin beistimmen, dass auch ungeachtet des Gebrauchs der Gabel oder Zange die genaue Lösung dieser Aufgabe immer mit Schwierigkeiten verbunden ist, und dass man sich meistens mit einem blossen „Beinahe“ zu begnügen gezwungen ist. Auch sagt ja u. A. schon Böhm in seiner, praktischen Feldmessern immer noch zu empfehlenden Gründlichen Anleitung zur Messkunst auf dem Felde. Dritte Auflage von J. G. J. Cämmerer. Frankfurt a. M. 1807. S. 191.: „Den Messtisch in dem Punkte B auf der Erde so aufzustellen, dass derselbe zu gleicher Zeit horizontal stehe, wenn der Punkt b auf dem Tische über B auf dem Felde und die Linie ab des Tisches in einer bestimmten durch bB gehenden Vertikalebene liegt, sei eine allerdings nicht ohne Uebung und grosse Aufmerksamkeit aufzulösende Aufgabe.“ Der Grund der Schwie-

rigkeit dieser Aufgabe liegt, wie ein Jeder gleich übersieht, lediglich in dem Umstande, dass sich der Tisch nach der gewöhnlichen Einrichtung nur um seinen Mittelpunkt, d. h. bloss centrisch, nicht auch excentrisch drehen lässt, und es hat daher nicht an Vorschlägen gefehlt, diesem Uebelstande durch verschiedene besondere Einrichtungen des Tisches abzuhelfen. Man hat das Tischblatt in einem Rahmen verschiebbar gemacht, ein Vorschlag, der, wenn ich mich recht erinnere, zuerst von Bugge gemacht worden ist, und sich bei mehreren älteren Messtischen, die mir vorgekommen sind, in Ausführung gebracht findet; ja man hat sogar vorgeschlagen, den Messtisch nach Art einer Zollmannischen Scheibe zu gebrauchen, d. h. alle Winkel mittelst des Diopterlineals oder der Kippregel an den Mittelpunkt des Tisches, in welchem ein Stift eingeschlagen wird, anzutragen, und dieselben dann durch Parallellinien mittelst der dazu erforderlichen bekannten einfachen Werkzeuge (M. s. z. B. Neueste Versuche zur Erleichterung der praktischen Geometrie, von Voigt, Conrector in Quedlinburg. Leipzig. 1792.) oder mit Hülfe eines dreibeinigen Zirkels (M. s. z. B. Beiträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen für diejenigen, welche dergleichen Geschäfte zu leiten haben, von Tabor. Frankfurt a. M. 1804.) an die auf dem Tische gegebenen Punkte zu übertragen. Wie unpraktisch Vorschläge der letzteren Art, und wie wenig förderlich dieselben der grossen Genauigkeit sind, welche sich bei richtigem Gebrauche mit dem Messtische allerdings erreichen lässt, übersieht ein Jeder auf den ersten Blick, und solche künstliche mechanische Einrichtungen, wie die ersteren, halte ich für eben so wenig praktisch, da sie der so überaus nöthigen und wichtigen Festigkeit und Solidität des Tisches schaden, und doch auch nicht alle von ihnen gehoffte Bequemlichkeit und Sicherheit darbieten. Dass der Tisch bloss um seinen Mittelpunkt drehbar sei und bleibe, scheint mir eine Einrichtung zu sein, die man nie und nimmermehr verlassen darf, wenn man nicht der Genauigkeit der so vielen schönen Arbeiten, welche sich mit dem Messtische ausführen lassen, wesentlichen Eintrag thun will. Aber dann freilich bleibt immer die Nothwendigkeit einer zweckmässigen Lösung der fraglichen Aufgabe; denn sich mit einem blossen „Beinahe“ zu begnügen, und sich bei der ziemlich allgemein verbreiteten Meinung zu beruhigen, dass eine einigermassen excentrische Aufstellung des Messtisches der Genauigkeit der Operationen nicht schade, scheint mir wenigstens dem Wesen einer strengen Wissenschaft nicht angemessen zu sein, indem man gar nicht wissen kann, wie weit bei oft so complicirten Operationen kleine Fehler in der Aufstellung des Tisches sich fortpflanzen. Ich stehe nicht an, die Ueberzeugung auszusprechen, dass eine stets genau richtige Aufstellung des Messtisches über dem eigentlichen Stationspunkte der Genauigkeit und Sicherheit der Operationen (z. B. bei Aufnahmen aus dem Umfange) mit diesem, besonders bei seinen neueren schönen Einrichtungen zur Horizontalstellung der Planchette, zur feinen Horizontalbewegung, bei den neueren Verbesserungen der Kippregel, dass man z. B. nicht das Ocular nebst seinem Fadenkreuze, sondern vielmehr das Objectiv mittelst einer feinen Schraube beweglich einrichtet, u. s. w., in vielen Beziehungen so ausgezeichneten und der geometrischen Schärfe sich so sehr nähernden Instrumente wesentlich

förderlich sein wird. Ja ich glaube mit Recht sagen zu können, dass sich bei richtigem Gebrauche mit dem Messtische mit einer gewissen Eleganz arbeiten lässt, und eben um diese Eleganz bei den Messtischarbeiten zu erhöhen, habe ich mich, wie ich nicht leugne, ziemlich lange damit beschäftigt, ein zweckmässiges und völlig sicheres Verfahren zur richtigen Aufstellung des Tisches aufzufinden. Manches hat sich mir seit dem öfter wiederholten Nachdenken über diesen Gegenstand dargeboten; aber endlich bin ich bei einem Verfahren stehen geblieben, welches ich im Folgenden in der Kürze beschreiben will, ohne dass ich es für nöthig halte, mich auf die Erläuterung seiner Gründe einzulassen, da es an sich so höchst einfach ist, dass die Gründe ein Jeder sogleich selbst übersehen wird. So einfach die Sache auch an sich ist, so halte ich sie doch für hinreichend wichtig, um die Mittheilung des in Rede stehenden Verfahrens an diesem Orte zu rechtfertigen, und glaube überzeugt sein zu dürfen, dass ein Jeder, wer dieses Verfahren bei seinen Arbeiten nur einmal in Anwendung gebracht hat, es nie wieder verlassen wird. Es sollte mich fast nicht wundern, wenn dasselbe schon bekannt wäre, was mich aber nicht hindern kann, es hier mitzutheilen, da ich wenigstens mich nicht erinnere, in der mir zu Gebote stehenden ziemlich reichen Literatur desselben schon früher Erwähnung gethan gefunden zu haben.

Der Mittelpunkt des Tischblattes muss genau bezeichnet sein, wozu aber zwei kleine sich durchkreuzende Bleistiftlinien völlig hinreichen. Unten am Stative zwischen den Füssen des Tisches, möglichst genau im Mittelpunkte der Drehung des Tisches, und also übereinstimmend mit dem auf dem Tischblatte bezeichneten Mittelpunkte desselben, den wir im Folgenden der Kürze wegen M nennen wollen, muss ein Häckchen oder eine andere derartige einfache Einrichtung angebracht sein, um daran ein fast bis auf den Erdboden reichendes Loth aufhängen zu können.

Der Stationspunkt auf dem Erdboden sei A, und B sei ein zweiter Punkt auf der Erde, nach welchem von A aus die gerade Linie AB gerichtet ist. Ein auf dem Messtische gegebener Punkt sei a und ab sei eine von demselben ausgehende gerade Linie, welche gleichfalls auf dem Messtische gegeben ist. Man soll den Tisch so aufstellen, dass das Tischblatt horizontal ist, der Punkt a sich lothrecht über A befindet, und die gerade Linie ab auf dem Messtische der Linie AB auf dem Felde entspricht, oder die Linie ab auf dem Tische nach dem Punkte B auf dem Felde orientirt ist.

Dies zu bewerkstelligen, stelle man den Tisch mittelst des im Mittelpunkte der Drehung hängenden Lothes so auf, dass der Mittelpunkt M der Planchette lothrecht über A steht, und bringe das Tischblatt mittelst der bekannten drei Messing-Schrauben zur feinen Horizontalstellung, die bei der hier vorhabenden Operation wo möglich nicht fehlen dürfen, und des Niveaus in horizontale Lage, zwei Erfordernisse, denen mit der grössten Leichtigkeit und Genauigkeit zugleich entsprochen werden kann. Hierauf lege man die Kippregel an ab und orientire den Tisch mittelst der Mikrometerschraube oder der Schraube ohne Ende genau nach B. Dann lege man die Kippregel an aM,

und trage die Linie aM von M aus auf der entgegengesetzten Seite dieses Punktes an die Kippregel an, wodurch man in der Richtung der Kippregel auf dem Messtische einen auf der entgegengesetzten Seite von M ebenso weit von M wie a entfernten Punkt a' erhält. Diesen Punkt a' lothe man mittelst der Gabel auf den Erdboden ab, wodurch man auf letzterem den dem Punkte a' entsprechenden Punkt A' erhält. Nun nehme man den Messtisch weg, stelle ihn vermittelst des im Mittelpunkte der Drehung hängenden Lothes so auf, dass der Mittelpunkt M der Planchette lothrecht über A' steht, und bringe das Tischblatt mittelst der bekannten drei Schrauben und des Niveaus in horizontale Lage. Endlich lege man die Kippregel wieder an ab und orientire den Tisch, ohne denselben sonst im Geringsten zu verrücken, genau nach B, so wird man jederzeit zugleich das Loth der in den Punkt a gebrachten Gabel mit aller irgend erforderlichen Genauigkeit über dem auf dem Erdboden gegebenen Stationspunkte A einspielen sehen, und hierdurch also eine völlig genaue Aufstellung des Tisches bewirkt sein. Angenommen wird hierbei, dass der Punkt B eine merklich grosse Entfernung von dem Punkte A habe, was man aber bei Operationen mit dem Messtische, namentlich bei Anwendung der mit einem Fernrohr versehenen Kippregel, anzunehmen gewiss immer vollkommen berechtigt sein wird.

Bemerken will ich übrigens, dass man, nachdem man den Mittelpunkt des Tisches lothrecht über A gebracht und das Tischblatt horizontal gestellt hat, wenn man mit völliger geometrischer Strenge verfahren wollte, eigentlich erst durch M eine Parallele mit ab auf dem Tischblatte ziehen, die Kippregel an diese Parallele legen, den Tisch nach B orientiren, und dann weiter wie vorher verfahren müsste. Das Unpraktische dieser Procedur liegt aber zu sehr auf der Hand, als dass ich darüber noch ein Wort verlieren sollte, und auch durch das erstere Verfahren wird man sich hoffentlich, wenn nur der Punkt B ziemlich weit entfernt ist, was die zuletzt erreichte vollkommen richtige Stellung des Tisches betrifft, stets vollkommen befriedigt finden.

Freilich aber wird man gegen das angegebene Verfahren sogleich zwei Einwände machen.

Erstens, wird man sagen, ist das zweimalige Aufstellen des Tisches auf demselben Stationspunkte zeitraubend. Hierauf kann ich nichts weiter entgegnen, als dass nach meiner Erfahrung dieses zweimalige Aufstellen des Tisches auf demselben Stationspunkte, in der Weise nämlich wie es oben gelehrt worden ist, nicht zeitraubender ist als das gewöhnliche Verfahren durch mehrfaches Probiren und das dadurch nöthig gemachte öftere Verrücken des Tisches, dass aber, wenn auch selbst das vorgeschlagene neue Verfahren etwas mehr Zeit als das gewöhnliche kosten sollte, man dafür durch die völlig regelrechte und sichere Procedur bei dem neuen Verfahren und die grössere Genauigkeit des Endresultats vollkommen entschädigt wird.

Zweitens, wird man einwenden, entspricht das Uebertragen der Entfernung aM nach $a'M$ an der an aM liegenden Kippregel nur wenig einer gesunden Praxis. Auch dies zuzugeben, bin ich im Ganzen geneigt, glaube aber, dass sich diesem Uebelstande durch eine neue Einrichtung der Gabel vollkommen abhelfen lässt. Ich würde nämlich der Gabel etwa die in Taf. II. Fig. 3. dargestellte Einrichtung geben. An der gewöhnlichen Gabel ist ein Lineal oder eine Regel $\gamma\gamma'$ angebracht, die in ihrem Mittelpunkte α und in zwei andern zweckmässig gelegenen Punkten β, β' drei ganz kleine völlig gleich lange Spitzen, mit denen die Regel an die Kippregel angelegt werden kann, hat, und eine hinreichend weit getriebene Maasseintheilung trägt, die ihren Nullpunkt bei α hat und von da an nach γ und γ' hin aufgetragen ist. Der Punkt δ, in welchem das Loth hängt, muss bei dem Gebrauche der Gabel an der horizontal gestellten Planchette genau vertikal unter der Spitze α liegen. Der obere Arm der Gabel muss aber in einer Nuthe, an der eigentlich die Regel befestigt ist, etwas verschiebbar sein, und sich mittelst einer oder besser zweier Schrauben, die in der Figur angedeutet sind, in der Nuthe feststellen lassen, weil ohne diese Einrichtung die Spitze α nicht genau an den Mittelpunkt M der Planchette würde gebracht werden können, was, wie sich gleich nachher zeigen wird, erforderlich ist. Der Gebrauch dieser Einrichtung der Gabel bei dem in Rede stehenden Uebertragen von aM nach $a'M$, wobei natürlich die Regel an der an aM gelegten Kippregel und die Spitze α an dem Mittelpunkte M des Tischblattes liegen muss, und dem darauf folgenden Ablothen des Punktes a' auf den Erdboden, wodurch man auf letzterem den a' entsprechenden Punkt A' erhält, wird einem Jeden sogleich erhellen, ohne dass ich darüber noch Etwas zu sagen brauche. Die richtigen Verhältnisse der einzelnen Theile der Gabel zu den Dimensionen der Planchette wird jeder geschickte Mechanikus gleichfalls selbst zu treffen wissen. Nur auf den folgenden Punkt darf ich nicht unterlassen noch aufmerksam zu machen.

Bei dem Ablothen eines auf dem Tische gegebenen Punktes auf den Erdboden sind nämlich oft die Füsse des Tisches und andere Theile des Stativs hinderlich. Dieser Fall kann also auch eintreten, wenn man bei dem in Vorschlag gebrachten neuen Verfahren den Punkt a' auf den Erdboden ablothen soll, um den neuen Aufstellungspunkt A' des Mittelpunkts des Tisches zu erhalten, aber auch nur dann, weil das neue Verfahren sonst das Ablothen keines anderen Punktes auf den Erdboden in Anspruch nimmt. Diesem Uebelstande lässt sich aber bei dem neuen Verfahren sehr leicht begegnen, wenn man nur an der an aM liegenden Kippregel einen anderen Punkt als a' aufsucht, welcher sich, ohne jenes Hinderniss, bequem auf den Erdboden ablothen lässt, und bei zweckmässiger Einrichtung des Stativs des Messtisches gewiss immer gefunden werden kann. Bezeichnen wir diesen Punkt durch a'', und lothen ihn auf den Erdboden ab, wodurch wir auf letzterem den Punkt A'' erhalten, so brauchen wir nur an der Skale der Regel der Gabel, die an der Kippregel liegt, die Entfernung des Punktes a'' von a', d. h. die Linie $a''a'$, zu messen, und eine derselben gleiche Linie auf dem Erdboden von A'' an auf der auf dem Erdboden gegebenen Linie AA'' nach der

gehörigen Richtung hin abzumessen, so ist der Endpunkt dieser abgemessenen Linie der gesuchte Punkt A', wie auf der Stelle erhellet. Also auch dem bei dem gewöhnlichen Verfahren öfters eintretenden Uebelstande, dass die Füsse des Tisches oder andere Theile des Stativs einem genauen Ablothen der Punkte auf dem Tische auf den Erdboden hinderlich sind, wird durch das neue Verfahren so gut wie ganz abgeholfen, was demselben vielleicht auch zu einiger Empfehlung dienen wird.

Ich glaube, dass man dem hier besprochenen Gegenstande in neuerer Zeit zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, und sich zu sehr bei dem Glauben beruhigt hat, dass nicht sehr grosse Excentricitätsfehler bei der Aufstellung des Tisches der Genauigkeit der Operationen keinen wesentlichen Eintrag thun*). Ich halte den Messtisch bei richtiger Anwendung und recht zweckmässiger Einrichtung für ein sehr genaues geometrisches Constructions-Instrument, und bin daher der Meinung, dass man alle Quellen, aus denen Fehler entspringen können, soviel als irgend möglich zu verstopfen suchen muss. Ein kleiner Mehraufwand von Zeit, wenn derselbe sich wirklich ergeben sollte, darf dabei nicht in Anschlag gebracht werden. Leider wird, wenigstens in einigen Ländern, der Messtisch jetzt bei Weitem nicht mehr so häufig in Anwendung gebracht wie früher, und droht fast ganz durch andere Instrumente, namentlich durch die Boussole, verdrängt zu werden. Ohne manche von der Boussole, bei welcher allerdings namentlich Excentricitätsfehler in der Aufstellung nicht vorkommen können, dargebotene Vortheile irgend in Abrede stellen zu wollen, vermag ich die Einführung dieses Instruments auf Kosten des Messtisches doch nicht für einen Fortschritt in den Vermessungsgeschäften zu erkennen, und wünsche sehr, dass der Messtisch wieder allgemeiner in Gebrauch kommen möge, wie dies auch in manchen Ländern, so viel ich weiss z. B. in Sachsen und Hessen, auch in Oesterreich, mit Recht immer noch der Fall ist. Die obigen Zeilen haben ihren Zweck erreicht, wenn sie dazu Einiges beizutragen geeignet sein sollten.

---

*) In dem Handbuch des Feldmessens und Nivellirens in den gewöhnlichen Fällen von Crelle. Berlin. 1826. 8. S. 82. heisst es z. B.: „Da es aber auf eine solche Genauigkeit selten ankommt, indem es in den meisten Fällen nur einen unmerklichen Unterschied macht, wenn der Punkt auf dem Messtische selbst um einen Fuss seitwärts über dem zugehörigen Punkte am Boden liegt, so ist die Einlothzange eigentlich in der Regel nicht nöthig, und ihr Gebrauch verursacht nur Aufenthalt“ eine Ansicht, der ich durchaus nicht beistimmen kann, denn die Natur des Messtisches erfordert geometrische Genauigkeit. Die so sehr grosse Genauigkeit und Sorgfalt erfordernden Umfangs-Messungen, die man doch öfters nicht umgehen kann, habe ich schon oben besonders hervorgehoben.

IV.

Ueber die Bewegung einer Magnetnadel unter dem Einflusse eines unbegränzten galvanischen Stroms.

Von

Herrn Doctor J. Dienger,

Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

NS (Taf. II. Fig. 4.) sei eine Magnetnadel, deren Mitte O sei, $ON=OS=l$; in R stehe auf der Ebene der Figur, in der allein die Nadel sich drehen könne, ein unbegränzter Draht senkrecht, in welchem ein positiver galvanischer Strom abwärts steige. Ist N der Nordpol der Nadel, S ihr Südpol, so sucht der Strom den Pol N senkrecht auf NR nach aussen (rechts), den Pol S, senkrecht auf RS nach aussen (links) zu bewegen. Ist μ eine Konstante, so ist die in N wirkende Kraft bekanntlich gleich $\frac{\mu}{NR}$, die in S wirkende $\frac{\mu}{NS}$. Ist der Winkel NOR, den am Ende der Zeit t die Nadel mit der Linie OR, die wir als Axe der x annehmen, bildet, gleich α, und nehmen wir OB als Axe der y an, so ist

$$NR^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha,\quad NS^2 = a^2 + l^2 + 2al\cos\alpha, \tag{1}$$

wenn $OR=a$ gesetzt wird.

Die Koordinaten des Punktes R sind $l\cos\alpha$, $l\sin\alpha$; somit ist die Gleichung der Linie RN:

$$y-l\sin\alpha=\frac{l\sin\alpha}{l\cos\alpha-a}(x-l\cos\alpha),$$

die Gleichung der im Punkte N darauf Senkrechten somit

$$y-l\sin\alpha=\frac{a-l\cos\alpha}{l\sin\alpha}(x-l\cos\alpha). \tag{2}$$

Fällt man vom Punkte O auf diese letztere Linie eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\pm\frac{l^2\sin^2\alpha-al\cos\alpha+l^2\cos^2\alpha}{l\sin\alpha\sqrt{1+\left(\frac{a-l\cos\alpha}{l\sin\alpha}\right)^2}}$$

$$=\pm\frac{l^2-al\cos\alpha}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos\alpha}}=\pm\frac{l(l-a\cos\alpha)}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos\alpha}}. \tag{3}$$

Man zerlege nun die in N wirkende Kraft in zwei andere, wovon die eine P senkrecht auf ON, die andere Q nach ON gerichtet ist. Das Moment der ersten in Bezug auf O ist Pl. Dieses Moment wird auch gefunden, wenn man die Kraft in N multiplizirt mit der Länge (3), d. h. es ist

$$\pm\frac{\mu}{\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\alpha}}\cdot\frac{l(l-a\cos\alpha)}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos\alpha}}$$
$$=\pm\frac{\mu l(l-a\cos\alpha)}{a^2+l^2-2al\cos\alpha}.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, setze man $\alpha=0$, so ist das Moment:

$$\pm\frac{\mu l(l-a)}{(a-l)^2}.$$

Da dasselbe die Nadel rückläufig (d. h. umgekehrt, wie die Zeiger einer Uhr) zu drehen strebt, und $a>l$, so ist das obere Zeichen zu wählen, so dass das Moment (Kräftepaar), welches in N die Nadel rechtläufig zu drehen strebt, ist:

$$\frac{\mu l(l-a\cos\alpha)}{a^2+l^2-2al\cos\alpha}.$$

Ganz eben so findet man für das Kräftepaar, das in S die Nadel rechtläufig zu drehen strebt:

$$\frac{-\mu l(l+a\cos\alpha)}{a^2+l^2+2al\cos\alpha}.$$

Das Gesammtmoment, das die Nadel rechtläufig zu drehen strebt, ist also

$$\frac{\mu l(l-a\cos\alpha)}{a^2+l^2-2al\cos\alpha}-\frac{\mu l(l+a\cos\alpha)}{a^2+l^2+2al\cos\alpha}=\frac{2\mu l(l^2-a^2)a\cos\alpha}{(a^2+l^2)^2-4a^2l^2\cos^2\alpha}.$$

Da diese Grösse negativ ist, so sucht also die Nadel sich rückläufig zu bewegen, d. h. den Winkel α zu vergrössern. Ist somit k das Trägheitsmoment der Nadel, in Bezug auf O, so ist die Gleichung der Bewegung:

$$k\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\frac{2\mu l(a^2-l^2)a\cos\alpha}{(a^2+l^2)^2-4a^2l^2\cos^2\alpha}=\frac{2\mu l(a^2-l^2)a\cos\alpha}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin^2\alpha}. \quad (4)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{k}{2\mu}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{2al\sin\alpha}{a^2-l^2}\right)+C.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit $(=\frac{\partial\alpha}{\partial t})$ im Anfange der Bewegung, für welche $\alpha=\gamma$ sei, Null, so ergiebt sich

$$\frac{k}{2\mu}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2+4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma)}\right); \quad (5)$$

durch welche Gleichung die Winkelgeschwindigkeit $(=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, in so ferne sie α zu vergrössern strebt) gegeben ist. Daraus folgt nun zunächst, dass, wenn $l=a$, d. h. wenn der Punkt R auf dem Umfange des Kreises ist, den die Pole der Nadel beschreiben, keine Bewegung Statt hat, wo auch anfänglich die Nadel sich befinde, so dass sie also in jeder Lage in Ruhe bleibt, was auch aus (4) folgt. Ist ferner $a>l$, d. h. der Punkt R ausserhalb des Kreises, so folgt aus (4), dass die Nadel anfängt sich nach rechts zu bewegen (rückläufig), wenn $\gamma<\frac{\pi}{2}$, und aus (5) folgt, dass immer $\alpha>\gamma$ sein wird. Ist dagegen $a<l$, d. h. R innerhalb des Kreisumfangs, so wird die Nadel sich anfänglich links bewegen, wenn $\gamma<\frac{\pi}{2}$, und immer $\alpha<\gamma$ sein. Aus (5) ergiebt sich ferner, dass wenn

$a>l$, die Nadel zwischen $\alpha=\gamma$ und $\alpha=\pi-\gamma$ hin- und herschwankt,
$a<l$, " " " $\alpha=\gamma$ " $\alpha=-(\pi+\gamma)$ " " .

Im letztern Falle wird aber der Draht die Bewegung der Nadel hemmen, wenn nicht γ schon negativ ist. R liegt dabei immer auf der Linie OA.

Aus (5) folgt nun

$$\sqrt{\frac{2\mu}{k}}\, t = \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc.}\left(\text{tg} = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha - \sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2 + 4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}\right)}}; \qquad (6)$$

woraus die Zeit t bestimmt wird. Ist $a > l$, so ist die Zeit, welche von einer äussersten Lage zur andern verschwindet:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \int_{\gamma}^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha - \sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2 + 4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}\right)}}. \qquad (7)$$

Für den besonderen Fall, dass $\gamma = 0$, ist diese Grösse:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \int^{\pi} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2al\sin\alpha}{a^2-l^2}\right)}}. \qquad (7')$$

Aus (5) folgt, dass die rückkehrende Bewegung der hingehenden gleich ist, ja dass die beiden Hälften jeder dieser Bewegungen gleich sind, d. h. die Bewegung ist der eines Pendels ähnlich.

§. 2.

Im Vorstehenden nahmen wir den Punkt R (Draht) (Taf. II. Fig. 5.) als fest an, und untersuchten seine Wirkung auf eine bewegliche Nadel. Nunmehr wollen wir die Nadel NS als unveränderlich betrachten, während der Punkt R seinen Ort ändern könne. Wir nehmen die Axe der Nadel OH als Axe der y, und die darauf Senkrechte OF als Axe der x an; zugleich mögen x, y die Koordinaten des Punktes R sein. Die Gleichung der Linie RN ist:

$$Y - y = \frac{y-l}{x}(X - x),$$

die Gleichung der im Punkte N darauf Senkrechten:

$$Y - l = \frac{x}{l-y} X.$$

Fällt man vom Punkte O aus auf diese eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\frac{l}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{(l-y)^2}}} = \pm \frac{l(l-y)}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2}}.$$

Die Kraft, die in N senkrecht auf RN wirkt, ist

$$\frac{\mu}{\sqrt{x^2+(l-y)^2}}.$$

Das Drehungsmoment derselben in Bezug auf O ist

$$\frac{\mu l(l-y)}{x^2+(l-y)^2}, \qquad (8)$$

insofern als die Bewegung wie die Zeiger einer Uhr als rechtläufig angesehen wird. Zerlegt man die Kraft in N in zwei andere, die eine senkrecht auf ON, die andere nach ON gerichtet, und betrachtet man die Kräfte als positiv, welche die Koordinaten zu vergrössern streben, so findet man die erstere, wenn man (8) durch l dividirt, so dass die beiden sind:

$$\frac{\mu(l-y)}{x^2+(l-y)^2}, \quad \frac{\mu x}{x^2+(l-y)^2}. \qquad (9)$$

Für die in S wirkende Kraft erhält man eben so das Drehungsmoment:

$$\frac{-\mu l(l+y)}{x^2+(l+y)^2}, \qquad (10)$$

und die beiden Kräfte:

$$\frac{\mu(l+y)}{x^2+(l-y)^2}, \quad \frac{-\mu x}{x^2+(l-y)^2}. \qquad (11)$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so erhält man als Wirkungen des Punktes R auf die Nadel:

a) das Kräftepaar

$$\frac{\mu l(l-y)}{x^2+(l-y)^2}-\frac{\mu l(l+y)}{x^2+(l+y)^2}=\frac{2l\mu y(l^2-x^2-y^2)}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \qquad (12)$$

welches die Nadel rechtläufig zu drehen strebt;

b) die Kraft

$$\frac{\mu(l-y)}{x^2+(l-y)^2}+\frac{\mu(l+y)}{x^2+(l+y)^2}=\frac{2\mu l(l^2+x^2-y^2)}{(x^2+(l-y)^2)(x^2+(l+y)^2)}, \qquad (13)$$

welche den Punkt O parallel der Axe der x, nach der Richtung der positiven x zu bewegen strebt;

c) die Kraft

$$\frac{\mu x}{x^2+(l-y)^2}-\frac{\mu x}{x^2+(l+y)^2}=\frac{4\mu lxy}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \qquad (14)$$

welche den Punkt O parallel mit der Axe der y, nach der Richtung der positiven y zu bewegen strebt.

Fasst man die Kräfte (13) und (14) zusammen, so erhält man eine einzige Kraft P, die mit der Axe OF den Winkel β macht, bestimmt durch:

$$P = \frac{2l\mu\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}{[x^2+(l-y)^2][x^2+(l+y)^2]}, \quad (15)$$

$$\cos\beta = \frac{l^2+x^2-y^2}{\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}, \quad \sin\beta = \frac{2xy}{\sqrt{(l^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass das Gesagte gilt, wo auch R liege.

Hieraus lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

I) Die Nadel NS sei nur beweglich um eine auf der Ebene der Figur senkrechte Axe, und es befinde sich der Punkt R im Raume

FCNH, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y>0$, also geht N von R weg, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

HNDE, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y>0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

EDSG, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y<0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

GSCF, so ist $l^2-x^2-y^2<0$, $y<0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

CON, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y>0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

NOD, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y>0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung;

DOS, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y<0$, also geht N gegen R, und S kommt von R im Anfange der Bewegung;

SOC, so ist $l^2-x^2-y^2>0$, $y<0$, also kommt N von R, und S geht gegen R im Anfange der Bewegung.

Liegt R auf dem Kreise um O selbst, so ist

$$l^2-x^2-y^2=0,$$

also hat keine Bewegung Statt; dasselbe hat Statt, wenn R auf der Axe der x liegt.

II) Die Nadel sei senkrecht aufgehängt an einem Faden, sei also nur beweglich parallel mit der Axe x.

Durch die Pole N und S (Taf. II. Fig. 6.) ziehe man die zusammengehörigen Hyperbeln, deren Gleichung

$$l^2+x^2-y^2=0 \qquad (16)$$

sei und es liege R

1) innerhalb der Hyperbeln *ANB*, *CSD*, so ist

$$l^2+x^2-y^2<0,$$

also wird die Nadel (der Punkt O) sich nach der Seite der negativen x (links) bewegen, d. h. scheinbar von R abgestossen werden, wenn R sich im ersten und vierten, angezogen, wenn er sich im zweiten und dritten Koordinatenwinkel befindet;

2) zwischen den beiden Hyperbeln, also im unbegränzten Raume *ANBDSC*... Alsdann ist

$$l^2+x^2-y^2>0,$$

also geht O nach der Seite der positiven x (rechts), d. h. die Nadel wird scheinbar angezogen, wenn R sich im ersten und vierten, abgestossen, wenn er sich im zweiten und dritten Koordinatenwinkel befindet;

3) auf einer der Hyperbeln selbst, so ist

$$l^2+x^2-y^2=0,$$

also hat keine Bewegung Statt.

III) Endlich nehme man an, die Nadel schwimme auf Wasser, könne sich also in ihrer Ebene frei bewegen und untersuche die Bewegungsrichtung des Punktes O. Es liege nun R

a) innerhalb der Hyperbeln *ANB*, *CSD*, und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta<0$, $\sin\beta>0$, d. h. O bewegt sich in den zweiten Koordinatenwinkel;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta<0$, $\sin\beta<0$, d. h. O bewegt sich in den dritten Koordinatenwinkel;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta<0$, $\sin\beta>0$, d. h. O bewegt sich in den zweiten Koordinatenwinkel;

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta<0$, $\sin\beta<0$, d. h. O bewegt sich in den dritten Koordinatenwinkel;

b) zwischen den beiden Hyperbeln, also im Raume *ANBDSC*...., und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta>0$, $\sin\beta>0$, d. h. O bewegt sich in den ersten Koordinatenwinkel;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta>0$, $\sin\beta<0$, d. h. O bewegt sich in den vierten Koordinatenwinkel;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta>0$, $\sin\beta>0$, d. h. O bewegt sich in den ersten Koordinatenwinkel;

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta > 0$, $\sin\beta < 0$, d. h. O bewegt sich in den vierten Koordinatenwinkel;

c) auf den Hyperbeln und zwar:

1) im ersten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = 1$, d. h. O bewegt sich gegen N;

2) im zweiten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = -1$, d. h. O bewegt sich gegen S;

3) im dritten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = 1$, d. h. O bewegt sich gegen N;

4) im vierten Koordinatenwinkel, so ist $\cos\beta = 0$, $\sin\beta = -1$, d. h. O bewegt sich gegen S;

d) auf der Axe der x, und zwar:

1) auf dem positiven Theil, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F;

2) auf dem negativen Theil, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F, wie so eben;

e) auf der Axe der y, und zwar:

α) innerhalb der Hyperbeln ANB, CSD;

1) im positiven Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = -1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach E;

2) im negativen Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = -1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach E;

β) zwischen den beiden Hyperbeln;

1) im positiven Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F;

2) im negativen Theil der Axe der y, so ist $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h. O bewegt sich nach F.

Aus diesen Angaben wird man nun leicht die scheinbare Anziehung oder Abstossung ableiten können.

Für den Fall II) wird, je nach der Lage von R, die Spannung des Aufhängefadens vermehrt oder vermindert (14). Ist R nämlich im ersten oder dritten Koordinatenwinkel, so wird dieselbe vermindert um

$$\frac{4\mu l x y}{[x^2 + (l-y)^2][x^2 + (l+y)^2]};$$

ist aber R im zweiten oder vierten, so wird sie vermehrt um

$$\frac{4\mu l \sqrt{x^2 y^2}}{(x^2 + (l-y)^2)\,(x^2 + (l+y)^2)},$$

worin natürlich μ ein Gewicht anzeigt, gleich der Einwirkung des Drahtes auf einen Pol in der Entfernung 1.

§. 3.

Ist im Falle der Formel (7) γ nahe an $\frac{\pi}{2}$, $a > l$, so ist $\sin\alpha - \sin\gamma$ beinahe immer Null, man wird also ungefähr setzen können:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2-l^2)^2 + 4a^2l^2\sin\alpha\sin\gamma}\right) = \frac{2al(a^2-l^2)(\sin\alpha-\sin\gamma)}{(a^2+l^2)^2}.$$

Daraus folgt, dass die Zeit einer Schwingung von einem Aeussersten zum anderen ist:

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \frac{a^2+l^2}{\sqrt{2al(a^2-l^2)}} \int_\gamma^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha - \sin\gamma}}$$

$$= \frac{C.(a^2+l^2)}{2} \sqrt{\frac{k}{al(a^2-l^2)\mu}},$$

wenn C eine Konstante ist. Daraus folgt, dass die Schwingungsdauer im Verhältniss zu $\sqrt{a}$ steht, ein Satz, der bekanntlich nach der Lehre vom Pendel, die für diesen Fall anwendbar ist, zeigt, dass die wirksame Kraft im umgekehrten Verhältniss zu a steht, was eben der Satz ist, von dem wir ausgingen.

Für den Fall, dass l klein ist, so dass man l^2 gegen a^2 vernachlässigen kann, giebt (7) ebenfalls

$$\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2l}} \int_\gamma^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha - \sin\gamma}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ak}{\mu l}} \int_\pi^{\pi-\gamma} \frac{\partial\alpha}{\sqrt{\sin\alpha - \sin\gamma}}.$$

V.

Ueber die Periodicität der Decimalbrüche.

Von

Herrn W. Looff,

Director des Herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha.

In meinem „Leitfaden für den Unterricht im praktischen Rechnen und in der Arithmetik, erster Cursus, Gotha 1850" habe ich in einem Excurse über die Periodicität der Decimalbrüche eine Tabelle derjenigen Primzahlen mitgetheilt welche als Nenner eines gemeinen Bruchs eine Periode von bestimmter Stellenzahl geben. Die bei der Herausgabe meines Leitfadens begonnene Arbeit habe ich fortgesetzt, wobei mir ein Auszug aus den Burckhardt'schen Tafeln der Primzahlen, welcher mir durch die Güte des Herrn Professor Dr. Jacobi mitgetheilt wurde, sehr zu statten kam. Ich erlaube mir daher diese Tabelle in grösserer Ausdehnung, als ich sie in meinem Leitfaden gegeben, hier mitzutheilen, nachdem ich die wenigen nothwendigen Sätze vorausgeschickt habe.

1) Giebt der Bruch $\frac{1}{n}$ eine Periode von k Stellen und bezeichnet man die Periode der Decimalstellen mit P, so ist

$$10^k - 1 = nP.$$

Es müssen daher alle Factoren von 10^k-1 eine Periode von k Stellen geben. Eine Periode von einer Stelle giebt daher $10-1=9$, also 3 und 9. Um die Primzahlen, welche eine Periode von 2, 3, u. s. w. Stellen geben, zu finden, braucht man nur die Factoren

von $\frac{10^k-1}{9}$ aufzusuchen. Eine Periode von 2 Stellen giebt daher nur 11, von 3 Stellen 37 als Factor von 111, von 4 Stellen 101 als Factor von 1111, von 5 Stellen 41 und 271 als Factoren von 11111. Bei 6 Stellen kann man $\frac{10^6-1}{9}$ durch 3, 11 und 37 dividiren. Der Quotient 91 ist $=7\times13$, die einzigen Primzahlen, welche eine Periode von 6 Stellen geben.

Für sieben Stellen müssen die Factoren von 1111111 gefunden werden. Da aber nur eine solche Primzahl n eine Periode von p Stellen geben kann, welche um 1 verringert durch p theilbar ist, so ist

$$n-1=mp,$$

folglich

$$n=mp+1.$$

Ist p eine ungerade Zahl, m ebenfalls eine ungerade Zahl, so ist mp eine ungerade, folglich $mp+1$ eine gerade Zahl, die nicht Factor von 1111.... sein kann. Man braucht daher für m nur gerade Zahlen zu setzen. Ist dann $m=2c$, so können nur solche Primzahlen Factoren von $\frac{10^p-1}{9}$ (p eine ungerade Zahl) sein, welche die Form $2cp+1$ haben. Für sieben Stellen also musste der Versuch mit allen Primzahlen von der Form $14p+1$ bis zu $\sqrt{1111111}$ gemacht werden. Hieraus ergab sich

$$239\times4649=1111111.$$

Für die Perioden von gerader Stellenzahl, z. B. 8, kann $\frac{10^8-1}{9}$ durch 11 und 101 ohne Rest dividirt werden, daher nur 10001 in die Factoren 73 und 137 zu zerlegen war.

Für 11 Stellen giebt es 129 Primzahlen von der Form $22r+1$, von welchen

$$21649\times513239=11111,111111.$$

Für 13 Stellen wurde die Untersuchung dadurch bedeutend erleichtert, dass von den Zahlen von der Form $26r+1$ schon 53 und 79 aufgingen. Der Quotient 265371653 ist nach einer durch 162 Divisionen geschehenen Ermittelung eine Primzahl.

In der nachfolgenden Tabelle sind die mit ? bezeichneten Zahlen noch nicht als Primzahlen ermittelt.

Periodenzahl.	Zahl.
1	3 so wie 3^2 oder 9.
2	11.
3	37.
4	101.
5	41. 271.
6	7. 13.
7	239. 4649.
8	73. 137.
9	333667.
10	9091.
11	21649. 513239.
12	9901.
13	53. 79. 265371653.
14	909091.
15	31. 2906161.
16	17. 5882353.
17	? *)
18	19, 52579.
19	? **)
20	3541, 27961.
21	43, 1933, 10838689.
22	23. 4093. 8779.
23	11111, 111111, 111111, 111111.
24	99990001.
25	1000010000100001000001. ?
26	859. 1058313049.
27	757. 440334654777631. ?
28	29. 281. 121499449.
29	3191. x.
30	211. 241. 2161.
31	2791. 39810502010430351526732 7521. ?
32	353. 449. 641. 1409. 69857.

*) Bei 17 sind die Untersuchungen mit allen Primzahlen bis 230000 ohne Erfolg gewesen.

**) Bei 19 haben die Untersuchungen aller Primzahlen bis 100000 keinen Erfolg gehabt.

Periodenzahl.	Zahl.
33	67. 134462821011 3298373?
34	103. 4013. 21993833369?
35	71. 1267618436747776043535 21?
36	999999000001?
37 – 40	?
41	83. 1231. x.
42	127. 2689. 459691. $(7^4 . 11^2 . 13^2)$.
43	173. x.
44	89. 111247079764156 1909?
45	299700000299700299999703?
46	47. 139. 2531. 549797184491 91?
47	?
48	9999999900000001?
49	?
50	251. 5051. 7170612021057792 91?
51	613. 14696588921711270961009 9495907?
52	521. 190038197677733224378 1?
53	107. x.
54	999999999000000001?
55	1321. x.
56	7841. 127522001020150503761?
57	?
58	59. 154083204930662557781201849.?
59	?
60	61. 1655736049181983604901641.

VI.

Eine allgemeine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem

Herrn Doctor W. Schlesicke,

Lehrer am Gymnasium zu Luckau.

In Thl. XII. Nr. XII. des Archivs ist bereits eine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades gegeben worden, welche im Wesentlichen darauf beruht, dass $x=u+v$ gesetzt und in der so transformirten und nach u geordneten Gleichung die Summe des zweiten und des vierten Gliedes als verschwindend angenommen wurde. Dem am angeführten Orte angewendeten Verfahren liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, dass das zweite Glied der gegebenen Gleichung, wenn ein solches vorhanden war, bereits fortgeschafft sei. Es lässt sich indess die ganze Rechnung vollkommen in derselben Weise auch ohne vorhergegangene Fortschaffung des zweiten Gliedes in völliger Allgemeinheit anstellen; nur ist man in diesem Falle genöthigt, ausser der gewöhnlichen Hülfsgleichung des dritten Grades noch eine andere vom zweiten Grade aufzulösen. Dennoch scheint die allgemeine Methode, welche in dieser, übrigens der früheren durchaus folgenden, Abhandlung gezeigt werden soll, an Einfachheit die aus den Formeln 24) und 25) in Theil XII. Nro. XII. sich ergebende einigermassen zu übertreffen, und zugleich wird aus derselben erhellen, dass die Fortschaffung des zweiten Gliedes wenigstens zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades unwesentlich ist.

Die gegebene Gleichung des vierten Grades sei:

$$1)\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$2)\quad x = u + v,$$

so erhält man

$$(u+v)^4 + a(u+v)^3 + b(u+v)^2 + c(u+v) + d = 0;$$

d. i.

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} u^4 + (4v+a)u^3 + (6v^2+3av+b)u^2 \\ \quad + (4v^3+3av^2+2bv+c)u \\ \quad + v^4 + av^3 + bv^2 + cv + d \end{array}\right\} = 0.$$

Die willkührlichen Grössen u und v wollen wir nun so zu bestimmen suchen, dass in der Gleichung 3) die Summe derjenigen Glieder, welche die ungeraden Potenzen von u enthalten, verschwindet; so dass also

$$(4v+a)u^3 + (4v^3+3av^2+2bv+c)u = 0,$$

oder

$$4)\quad u\{(4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c\} = 0$$

ist. Dieser Gleichung wird genügt, wenn man entweder

$$u = 0 \text{ oder } (4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c = 0$$

annimmt. Die erstere dieser Auflösungen würde nach 2) $x = v$ geben; mithin würde man durch dieselbe in die gegebene Gleichung für die unbekannte Grösse nur ein neues Symbol einführen, ohne dass man zu etwas wesentlich Neuem gelangen könnte. Wir werden daher die zweite Auflösung anzuwenden versuchen müssen und daher

$$5)\quad (4v+a)u^2 + 4v^3 + 3av^2 + 2bv + c = 0$$

annehmen. Hieraus ergiebt sich

$$6)\quad u^2 = -\frac{4v^3 + 3av^2 + 2bv + c}{4v+a},$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung 3) einführt:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{4v^3 + 3av^2 + 2bv + c}{4v+a}\right)^2 - (6v^2 + 3av + b)\dfrac{4v^3+3av^2+2bv+c}{4v+a} \\ \qquad + v^4 + av^3 + bv^2 + cv + d \end{array}\right\} = 0,$$

oder, indem man mit $(4v+a)^2$ multiplicirt:

$$7)\quad \left.\begin{array}{r}(4v^3+3av^2+2bv+c)^2-(4v+a)(6v^2+3av+b)(4v^3+3av^2+2bv+c)\\ +(4v+a)^2(v^4+av^3+bv^2+cv+d)\end{array}\right\}=0.$$

Entwickelt man aber diese Gleichung, so erhält man

$$8)\quad \left.\begin{array}{r}64v^6+96av^5+(48a^2+32b)v^4+(8a^3+32ab)v^3\\ +(8a^2b+4ac+4b^2-16d)v^2+(2ab^2+2a^2c-8ad)v\\ +abc-a^2d-c^2\end{array}\right\}=0,$$

oder, wie auf der Stelle erhellet:

$$9)\quad \left.\begin{array}{r}(4v^2+2av+\frac{2}{3}b)^3+(ac-\frac{1}{3}b^2-4d)(4v^2+2av+\frac{2}{3}b)\\ +\frac{1}{3}abc-a^2d-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2\end{array}\right\}=0^{*}),$$

d. i. wenn man

$$10)\quad 4v^2+2av+\frac{2}{3}b=\omega,$$

$$11)\quad ac-\frac{1}{3}b^2-4d=\beta,$$

$$12)\quad \frac{1}{3}abc-a^2d-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2=\gamma$$

setzt:

$$13)\quad \omega^3+\beta\omega+\gamma=0.^{**})$$

---

*) Es möge noch bemerkt werden, dass man die Gleichung 8) auch auf eine andere Form bringen könnte; setzt man nämlich

$$4v^2+2av=\omega_1,$$

so erhält man aus 8)

$$\omega_1{}^3+2b\omega_1{}^2+(ac+b^2-4d)\omega_1+abc-a^2d-c^2=0,$$

eine Gleichung, welche allerdings etwas einfacher ist, in welcher aber das zweite Glied, welches in 9) fehlt, noch vorkommt. Nimmt man in dieser Gleichung a als verschwindend an, so erhält man die, mit Gleichung 9) in Theil XII. Nro. XII. übereinstimmende, gewöhnliche Hülfsgleichung des dritten Grades.

**) Die oben in 10) durch ω bezeichnete Grösse erhält man offenbar aus dem Coefficienten von u^2 in der transformirten Gleichung 3), wenn man denselben mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt. Bezeichnet man nämlich die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Gleichung der Reihe nach durch V_3, V_2, V_1 und V; so dass also

Somit sind wir zu einer Gleichung des dritten Grades gelangt, auf welche, weil in derselben das zweite Glied fehlt, zur Bestimmung von ω die gewöhnlichen Auflösungsmethoden für Gleichungen dieses Grades unmittelbar angewendet werden können. Hat man vermittelst einer dieser Methoden ω bestimmt, so erhält man v aus der Gleichung 10)

$$4v^2+2av+\frac{2}{3}b=\omega.$$

Hieraus folgt

$$(2v+\frac{1}{2}a)^2=\omega+\frac{1}{4}a^2-\frac{2}{3}b,$$

oder, wenn wir

$$14)\quad \omega+\frac{1}{4}a^2-\frac{2}{3}b=k$$

setzen:

$$15)\quad v=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{k}\right\},$$

und

$$u^4+V_3u^3+V_2u^2+V_1u+V=0$$

ist; so wird aus Gleichung 7):

$$V_1^2-V_1V_2V_3+VV_3^2=0.$$

Nun ist aber

$$V_1V_2V_3=(\frac{1}{3}V_2^2+4V+ac-\frac{1}{3}b^2-4d)\,V_2,$$

$$VV_3^2=(\frac{8}{3}V_2+a^2-\frac{8}{3}b)V.$$

$$V_1^2=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{27}V_2^3+\frac{4}{3}VV_2+(\frac{8}{3}b-a^2)V+\frac{1}{3}(ac-\frac{1}{3}b^2-4d)V_2\\ -\frac{1}{3}abc+a^2d+\frac{2}{27}b^3-\frac{8}{3}bd+c^2.\end{array}\right.$$

Demnach

$$V_1V_2V_3-V_1^2-VV_3^2=\left\{\begin{array}{l}\frac{8}{27}V_2^3+\frac{2}{3}(ac-\frac{1}{3}b^2-4d)V_2\\ +\frac{1}{3}abc-a^2d-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2\end{array}\right\}=0,$$

welches wieder die obige Gleichung 9), oder wenn man die oben gebrauchten Zeichen einführt, die Gleichung 13) ist.

$$16)\quad 4v+a=\pm 2\sqrt{k}.$$

Führen wir nun aber für ω seinen Werth aus 14)

$$\omega=k-\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{3}b$$

in die Gleichung 13) ein und setzen auch für β und γ ihre entsprechenden Werthe, so erhalten wir die Gleichung

$$17)\quad \left.\begin{array}{r} k^3+(2b-\frac{3}{4}a^2)\,k^2+(\frac{3}{16}a^4-a^2b+ac+b^2-4d)k \\ -(\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c)^2 \end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung ist keine andere als diejenige, welche wir erhalten haben würden, wenn wir nach Fortschaffung des zweiten Gliedes in der gegebenen Gleichung 1) des vierten Grades nach den in Theil XII. Nro. XII. gegebenen Formeln gerechnet hätten. Aus der Beschaffenheit des letzten Gliedes dieser Gleichung folgt aber, dass, wenn

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=0$$

ist, ein Werth der Grösse k ebenfalls verschwindet; dass dagegen, wenn

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c\gtrless 0$$

ist, es jederzeit einen reellen, positiven und nicht verschwindenden, Werth der Grösse k giebt. Nehmen wir nun zuerst, indem wir zunächst den letzten Fall betrachten, an, es verschwinde die Grösse

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c$$

nicht, so erhellet, dass sich unter der gemachten Voraussetzung auch aus der Gleichung 13) jederzeit ein Werth für ω wird finden lassen, so dass

$$\omega>\frac{2}{3}b-\frac{1}{4}a^2$$

ist. Denken wir uns den, dieser Bedingung genügenden, Werth von ω zur Bestimmung der Grösse k in 14) gewählt, so erhalten wir offenbar nach 15) zwei reelle, von einander verschiedene, Werthe für v. Setzen wir nämlich, wozu wir nach dem Bisherigen offenbar berechtigt sind,

$$18)\qquad k=4\overline{\omega}^2,$$

so erhalten wir nach 15)

$$19)\qquad v=-\frac{1}{4}a\pm\overline{\omega},$$

oder

$$4v+a=\pm 4\overline{\omega}.$$

Aus der Gleichung 6)

$$u^2=-\frac{4v^3+3av^2+2bv+c}{4v+a}$$

ergeben sich demnach ebenfalls zwei reelle von einander verschiedene Werthe für u^2. Es ist nämlich, wie man sogleich findet:

$$u^2=-\frac{4\overline{\omega}^3+2(b-\frac{3}{8}a^2)\,\overline{\omega}\pm(\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c)}{4\overline{\omega}},$$

oder, wenn wir

$$20)\qquad b-\frac{3}{8}a^2=A,$$

$$21)\qquad \frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

setzen:

$$22)\qquad u^2=-\frac{4\overline{\omega}^3+2A\overline{\omega}\pm B}{4\overline{\omega}},$$

und folglich

$$23)\qquad u=\begin{cases}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2A\overline{\omega}\pm B}{\overline{\omega}}}\\[2mm] -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2A\overline{\omega}\pm B}{\overline{\omega}}},\end{cases}$$

mithin nach 2), 19), 23)

$$24)\quad x=\begin{cases}-\frac{1}{4}a\pm\bar{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}}\\ -\frac{1}{4}a\pm\bar{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}\pm B}{\bar{\omega}}}.\end{cases}$$

Somit sind wir unter der gemachten Voraussetzung, dass B nicht verschwindet, zur Bestimmung der vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades gelangt. Dieselben sind sämmtlich von einander verschieden, wenn keine der Grössen

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B \text{ und } 4\omega^3+2A\bar{\omega}-B$$

verschwindet. Sie sind sämmtlich reell, sobald

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}>0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}>0$$

ist; dagegen sämmtlich imaginär, wenn

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}<0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}<0$$

ist. Ferner sind zwei reell und zwei imaginär, wenn entweder

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}>0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}<0;$$

oder

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}<0,\quad -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}>0$$

ist. Endlich sind zwei derselben reell und gleich, wenn entweder

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B=0,$$

oder

$$4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B=0$$

ist; die anderen beiden Wurzeln sind dagegen reell oder imaginär, je nachdem respective

$$-\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}-B}{\bar{\omega}}\gtrless 0 \text{ und } -\frac{4\bar{\omega}^3+2A\bar{\omega}+B}{\bar{\omega}}\gtrless 0$$

ist. Uebrigens kann man sich davon, dass man in jedem Falle wirklich alle Wurzeln der gegebenen Gleichung durch die obigen Formeln 24) erhält, völlig in derselben Weise überzeugen, wie

dies in Theil XII. Nro. XII. gezeigt ist, weshalb wir hier diese Untersuchung füglich übergehen zu können glauben. Zum Schlusse haben wir nur noch den Fall zu betrachten, wenn die Grösse

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

verschwindet. In diesem Falle ist, wie wir das bereits oben gesehen haben, ein Werth von k und mithin auch von $4v+a$ Null. Für diesen Werth von $4v+a$ ist offenbar eine Auflösung der Gleichung 5)

$$(4v+a)u^2+4v^3+3av^2+2bv+c=0$$

in der oben 6) durchgeführten Weise unstatthaft, weil sowohl die Grösse $(4v+a)u^2$, als auch die Grösse

$$4v^3+3av^2+2bv+c=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=B$$

für sich verschwindet. Wir sind daher genöthigt, zur Bestimmung von u auf die Gleichung 3) zurückzugehen, welche aber, weil sowohl das zweite als das vierte Glied derselben für sich verschwindet, die einfachere Gestalt

$$u^4+(6v^2+3av+b)u^2+v^4+av^3+bv^2+cv+d=0,$$

oder, wenn wir auch hier für v seinen Werth $-\frac{1}{4}a$ einführen, die Form

$$u^4+(b-\frac{3}{8}a^2)u^2-\frac{3}{256}a^4+\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac+d=0$$

annimmt, und mithin wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden kann. Behalten wir die oben 20) für $b-\frac{3}{8}a^2$ gebrauchte Bezeichnung bei und setzen wir ferner

$$25)\quad -\frac{3}{256}a^4+\frac{1}{16}a^2b-\frac{1}{4}ac+d=C,$$

so erhalten wir

$$26)\quad u^4+Au^2+C=0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$27)\quad u=\begin{cases}+\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\\-\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}},\end{cases}$$

und demnach sind in diesem Falle die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$28)\quad x=\begin{cases}-\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\\ -\frac{1}{4}a-\sqrt{\frac{1}{2}\left\{-A\pm\sqrt{A^2-4C}\right\}}\end{cases}.$$

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, dass die im Obigen dargestellte Auflösungsmethode der Gleichungen des vierten Grades in einem bestimmten Falle, wenn nämlich

$$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c=0$$

ist, ebenfalls darauf führt, die Grösse $4v+a=0$ zu setzen, ganz in der Weise, wie es die Fortschaffung des zweiten Gliedes der gegebenen Gleichung erfordert. Hier aber, wenn auch dasselbe geschieht, ist der Erfolg ein anderer. Mit dem zweiten verschwindet nämlich auch zugleich das vierte Glied der Gleichung. Das Allgemeine bleibt daher nichts desto weniger, dass die gleichzeitige Fortschaffung derjenigen Glieder der Gleichung 3), welche die ungeraden Potenzen von u enthalten, bewirkt wird, und die übliche Fortschaffung des zweiten Gliedes erscheint als ein, dem allgemeinen untergeordnetes, specielleres Verfahren, welches nur in einem gewissen besonderen Falle direct zum Ziele führt. Zugleich scheint es der Beachtung werth, dass die, mit 3 multiplizirten, Wurzeln der durch das obige Verfahren erhaltenen kubischen Hülfsgleichung, gewisse Werthe des zweiten Differentialquotienten von der Funktion der gegebenen Gleichung des vierten Grades darstellen.

VII.

Ueber die Abel'schen Funktionen.

Von dem
Herrn Professor Dr. J. Dienger
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

In den nachfolgenden Zeilen sollen die Additionstheoreme dieser Funktionen nachgewiesen werden, mit Zugrundelegung der Abel'schen Abhandlung: Remarque sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. (Crelle's Journal Bd. III.). Einige Anwendungen mögen als weitere Ausführung folgen.

§. 1.

Es sei

$$\left.\begin{aligned}\theta(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_nx^n,\\ \theta_1(x)&=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots\dots+c_mx^m;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ferner seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ zwei ganze Funktionen von x;

$$\varphi_1(x)\,.\,\varphi_2(x)=\varphi(x)$$

also ebenfalls eine solche Funktion; α eine konstante Grösse;

$$a_0,\ a_1,\ \dots.\ a_n;\ \ c_0,\ c_1,\ \dots\dots c_m$$

entweder alle oder doch einige von ihnen veränderlich; endlich setze man:

$$F(x)=(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_r), \quad (2)$$

so werden $x_1, x_2, \dots x_r$ bloss von $a_0, a_1, \dots a_n$; $c_0, c_1 \dots c_m$ und den als konstant vorausgesetzten Koeffizienten in $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ abhängen, und eben so A von x unabhängig sein. Bezeichnet nun x_e irgend eine der Grössen $x_1, \dots x_r$; so ist identisch:

$$F(x_e)=0, \quad (3)$$

worin x_e eine Funktion von den Grössen a und c ist. Eben weil aber die Gleichung (3) eine identische ist, hat man bekanntlich auch:

$$F'(x_e)=0. \quad (4)$$

Diese letztere Gleichung liesse sich ohnehin auch leicht nachweisen. Denn man gebe den Grössen $a_0, a_1, \dots\dots c_0, c_1, \dots$ die willkührlichen Zuwächse $a'_0, a'_1 \dots$ und sei x'_e der daraus hervorgehende Zuwachs von x_e, so ist offenbar auch

$$F(x_e+x'_e)=0,$$

d. h.

$$F(x_e)+x'_eF'(x_e)+\dots\dots=0,$$

also nach (3):

$$F'(x_e)+\frac{x'_e}{2}F''(x_e)+\dots=0,$$

woraus leicht (4) geschlossen wird.

Die Grösse $F(x_e)$ enthält $a_0, a_1, \dots a_n$; $c_0, c_1, \dots c_m$ explizite, nebst x_e, also kann (4) auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}\partial x_e+\frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}\partial a_0+\frac{\partial F(x_e)}{\partial a_1}\partial a_1+\dots=0,$$

wenn

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}, \quad \frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}, \dots\dots$$

die Differenzialquotienten von $F(x_e)$ in Bezug auf $x_e, a_0, \dots$, insofern diese explizite in $F(x_e)$ enthalten sind, bedeutet. Diese Gleichung kann auch unter der Form:

$$\frac{\partial . F(x_e)}{\partial x_e}\partial x_e+\delta . F(x_e)=0 \quad (5)$$

dargestellt werden, wenn δ das vollständige Differenzial in Bezug auf die Grössen $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$, insofern sie explizite in $F(x_e)$ enthalten sind, bezeichnet.

Aus (2) folgt aber:

$$\delta . F(x_e) = 2.\theta(x_e)\varphi_1(x_e).\delta.\theta(x_e) - 2\theta_1(x_e).\varphi_2(x_e).\delta.\theta_1(x_e), \qquad (6)$$

also aus (6) und (5):

$$F'(x_e).\partial x_e = 2[\theta_1(x_e)\varphi_2(x_e)\delta.\theta_1(x_e) - \theta(x_e)\varphi_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]. \qquad (7)$$

Nach (3) ist aber:

$$(\theta(x_e))^2\varphi_1(x_e) - (\theta_1(x_e))^2\varphi_2(x_e) = 0,$$

d. h.

$$\theta(x_e).\sqrt{\varphi_1(x_e)} = \varepsilon_e \theta_1(x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)},$$

wenn ε_e entweder $+1$ oder -1, je nachdem die Beschaffenheit der bezüglichen Funktionen diess zulässt. Hieraus ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $\varphi_1(x).\varphi_2(x) = \varphi(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \theta(x_e).\varphi_1(x_e) &= \varepsilon_e\theta_1(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}, \\ \theta_1(x_e)\varphi_2(x_e) &= \varepsilon_e\theta(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Setzt man diess in (7), so erhält man:

$$F'(x_e)\partial x_e = 2\varepsilon_e[\theta(x_e)\delta.\theta_1(x_e) - \theta_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]\sqrt{\varphi(x_e)}.$$

Hieraus folgt, wenn $f(x)$ irgend eine ganze Funktion von x ist:

$$\varepsilon_e \frac{f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} \qquad (9)$$

$$= 2\frac{[\theta(x_e)\delta.\theta_1(x_e) - \theta_1(x_e)\delta.\theta(x_e)]}{(x_e-\alpha)F'(x_e)} f(x_e) = \frac{\lambda(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\lambda(x) = 2[\theta(x)\delta.\theta_1(x) - \theta_1(x)\delta.\theta(x)]f(x),$$

so dass $\lambda(x)$ immer eine ganze Funktion von x ist.

Bezieht sich nun das Summationszeichen Σ auf die Werthe $x_1, x_2, \ldots . x_r$, so folgt aus (9):

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = \Sigma \frac{\lambda(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(xe)}. \qquad (10)$$

Setzen wir

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(\alpha)}{x-\alpha} = \lambda_1(x),$$

so folgt aus (10):

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = \Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} + \lambda(\alpha)\,\Sigma \frac{1}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}.$$

Nach einem bekannten Satze (siehe die Anmerkung am Schlusse) ist aber:

$$\Sigma \frac{1}{(x_e-\alpha)F'(x_e)} = -\frac{1}{F(\alpha)},$$

also

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = \Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} - \frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)}, \tag{11}$$

und eben so weiss man, dass der Werth der Grösse $\Sigma \frac{x^r_e}{F'(x_e)}$ gleich ist dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha^{r+1}}$ in der nach fallenden Potenzen von α vorgenommenen Entwicklung von $\frac{1}{F(\alpha)}$, oder gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha}$ in der ähnlichen Entwicklung von $\frac{\alpha^r}{F(\alpha)}$. Bezeichnet man nun allgemein durch $\mathrm{K}\psi(x)$ den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der nach fallenden Potenzen von x vorgenommenen Entwicklung von $\psi(x)$, so ist also

$$\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} = \mathrm{K}\cdot\frac{\lambda_1(x)}{F'(x)}.$$

Da aber

$$\frac{\lambda_1(x)}{F(x)} = \frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} - \frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)},$$

und

$$\mathrm{K}\frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)} = 0,$$

da der Nenner mindestens vom zweiten Grade in Bezug auf x ist, so hat man

$$\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} = \mathrm{K}\cdot\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)}$$

und

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\partial x_e}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} = -\frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)} + K \cdot \frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)}$$

$$= -\frac{2[\theta(\alpha)\delta.\theta_1(\alpha)-\theta_1(\alpha)\delta.\theta(\alpha)]f(\alpha)}{(\theta(\alpha))^2\varphi_1(\alpha)-(\theta_1(\alpha))^2\varphi_2(\alpha)}$$

$$+ K. \frac{2[\theta(x)\delta.\theta_1(x)-\theta_1(x)\delta.\theta(x)]f(x)}{[(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)](x-\alpha)}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \delta.\log \frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}$$

$$+ K \cdot \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \delta.\log \frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}},$$

wie man leicht übersieht. Setzt man nun:

$$\int \frac{f(x)\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \psi(x),$$

so erhält man hieraus:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\varepsilon_3\psi(x_3)+\dots\dots+\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$= -\frac{f(x)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log.\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$

$$+ K \cdot \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$+ C, \qquad (1).$$

Die Grössen ε_e bestimmen sich aus (8).

Dieses Theorem lehrt also die (algebraische) Summe einer Reihe transzendenter Funktionen durch einen logarithmischen und algebraischen Ausdruck finden.

Man wird bei der vorstehenden Differenziation und Integration kaum einen Anstand haben. Zum Ueberfluss könnte man die (Grund-) Gleichung (5) auch so ausdrücken, dass man in Lagrange's Weise die Grössen x_e, a_0, a_1,.... sämmtlich als Funktionen derselben Grösse s betrachtete, wodurch dann die obige Gleichung hiesse:

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)\frac{\partial(x_e)}{\partial s}}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}$$

$$=-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\frac{\delta.}{\delta s}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$

$$+\mathrm{K}.\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\frac{\delta.}{\partial s}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

woraus sich (I) unmittelbar ergäbe.

Ein Anstand könnte darin gefunden werden, ob

$$\int \mathrm{K}\frac{\delta.}{\partial s}\psi(x)\partial s=\mathrm{K}\int\frac{\delta.}{\partial s}\psi(x)\partial s=\mathrm{K}.\psi(x),$$

wie vorausgesetzt wurde.

Allein sei

$$\psi(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\dots\dots,$$

so ist $A_1=\mathrm{K}.\psi(x)$ und

$$\delta.\psi(x)=\frac{\delta.A_1}{x}+\frac{\delta.A_2}{x^2}+\dots..$$

also

$$\mathrm{K}.\frac{\delta.}{\partial s}\psi(x)=\delta.A_1,$$

$$\int \mathrm{K}\cdot\frac{\delta.}{\delta s}\psi(x)\,\partial x=A_1=\mathrm{K}.\psi(x).$$

§. 2.

Es ist oben stillschweigend vorausgesetzt worden, dass x_1, $x_2,\dots..x_r$ verschieden seien, da sonst $F'(x_e)$ für einige dieser Grössen Null wäre. Nimmt man aber zuerst an, diese Werthe seien, statt gleich, um unendlich wenig verschieden, so wird die Formel (I) immer noch gelten, und da x_1, x_2,.... auf ihrer zweiten Seite nicht vorkommen, auch noch, wenn diese Unterschiede Null werden. Ist aber $x_s=x_{s+1}$, so folgt aus (8), dass auch $\varepsilon_s=\varepsilon_{s+1}$ sein muss. Ist also:

$$(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x) \doteq A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \ldots (x-x_r)^{m_r},$$

so ist

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)$$

$$+K\cdot\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)+C. \quad \text{(II)}$$

§. 3.

Setzt man in (II):

$$f(x)=(x-\alpha)\lambda(x),$$

wo also $\lambda(x)$ ebenfalls eine ganze Funktion von x ist, und folglich

$$\psi(x)=\int\frac{\lambda(x)\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so ist, weil $f(\alpha)=0$:

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=K.\frac{\lambda(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)+C, \quad \text{(III)}$$

worin den Grössen m und ε die obigen Bedeutungen zukommen.

§. 4.

Wird $f(x)$ so gewählt, dass der Grad von $(f(x))^2$ niedriger ist als der von

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)\,.\,\varphi_2(x),$$

so hat die Grösse

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

wenn sie entwickelt wird, die Potenz $\frac{1}{x}$ nicht. Denn



$$\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}$$

ist von demselben Grade, wie

$$\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)},$$

folglich enthält

$$\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

bei der Entwicklung nach fallenden Potenzen keine positive Potenz von x, also enthält

$$\frac{1}{x-\alpha}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

höchstens die Potenz $\frac{1}{x}$. Da aber $f(x)$ von niedrigerem Grade ist, als $\sqrt{\varphi(x)}$, so enthält also

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

die Potenz $\frac{1}{x}$ nicht.

In diesem Falle hat man, wenn

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}:$$

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1) + m_2\varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right) + C. \quad \text{(IV)}$$

§. 5.

Setzt man nun in Verbindung von §. 3. und §. 4. voraus, das

$$f(x) = (x-\alpha)\lambda(x)$$

und der Grad von $x^2(\lambda(x))^2$ niederer als der von $\varphi(x)$, so is wenn

$$\psi(x) = \int \frac{\lambda(x)\,\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}:$$

$$m_1 \varepsilon_1 \psi(x_1) + m_2 \varepsilon_2 \psi(x_2) + \ldots\ldots + m_r \varepsilon_r \psi(x_r) = C. \qquad \text{(V)}$$

§. 6.

Differenzirt man die Formel (IV) $(n-1)$mal nach einander in Bezug auf α, setzt also

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)\,\partial x}{(x-\alpha)^n \sqrt{\varphi(x)}},$$

$(f(x))^2$ von niederm Grade als $\varphi(x)$, so ist

$$m_1 \varepsilon_1 \psi(x_1) + m_2 \varepsilon_2 \psi(x_2) + \ldots\ldots\ldots + m_r \varepsilon_r \psi(x_r)$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log\cdot\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \right) \right] + C, \qquad \text{(VI)}$$

da die Constante im Allgemeinen von dem Werthe von α abhängen kann.

§. 7.

Ist endlich

$$\psi(x) = \int \frac{X \partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

und ist X eine beliebige rationale Funktion von x, so wird man setzen können:

$$X = f_0(x) + \frac{f_1(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \frac{f_2(x)}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{f_s(x)}{(x-\alpha_s)^{n_s}},$$

worin $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_s(x)$ ganze Funktionen von x sind.

Genügen nun $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_s(x)$ der Bedingung, welcher $f(x)$ in §. 6. genügen muss, so folgt aus §. 3. und §. 6.:

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=K\frac{f_0(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\sigma(x)-\frac{1}{\Gamma(n_1)}\frac{\partial^{n_1-1}}{\partial\alpha_1^{n_1-1}}\left(\frac{f_1(\alpha_1)}{\sqrt{\varphi(\alpha_1)}}\log\sigma(\alpha_1)\right)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{\Gamma(n_s)}\frac{\partial^{n_s-1}}{\partial\alpha_s^{n_s-1}}\left(\frac{f_s(\alpha_s)}{\sqrt{\varphi(\alpha_s)}}\log\sigma(\alpha_s)\right)+C, \qquad \text{(VII)}$$

worin

$$\sigma(x)=\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}.$$

§. 8.

Man setze in §. 3.

$$\varphi_1(x)=x,\quad \varphi_2(x)=1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots\ldots+\alpha_{2n}x^{2n},$$
$$\theta(x)=a_0+a_1x+x_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n,\quad \theta_1(x)=c;$$

so ist

$$F(x)=x(\theta(x))^2-c^2(\varphi_2(x))=(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{2n+1})$$
$$=x^{2n+1}+\beta_1x^{2n}+\ldots\ldots+\beta_{2n+1} \qquad (12)$$

eine ganze Funktion vom Grade $2n+1$. Ist nun noch $\lambda(x)=x^m$, so wird, so lange $2m+2<2n+1$, $2m<2n-1$, also $m\leqq n-1$, der Satz §. 5. gelten, also, für

$$\psi(x)=\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{x(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{2n}x^{2n})}}:$$

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n+1}\psi(x_{2n+1})=C, \qquad \text{(VIII)}$$

worin allgemein ε_e durch die Gleichung

$$x_e\theta(x_e)=\varepsilon_ec\sqrt{x_e\varphi_2(\ _e)}$$

bestimmt wird.

Ist aber $m\geqq n$, so tritt §. 3. in sein Recht. Sei $m=n+r$ und

$$\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)=\frac{A_0}{x^{n+1}}+\frac{A_1}{x^{n+2}}+\ldots\ldots,$$

so ist klar, dass

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n+1}\psi(x_{2n+1})=C+A_r. \qquad \text{(IX)}$$

Setzt man

$$\frac{c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{F(x)}}=y,$$

so ist, da

$$\sqrt{x}\,.\,\theta(x)=\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\sqrt{F(x)+c^2\varphi_2(x)}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

auch

$$\log\left(\frac{\theta(x)\sqrt{x}+c\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{x}-c\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}-y}\right)=2\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4.5}y^5-\frac{3.5}{4.6.7}y^7+\ldots\ldots,$$

daher

$$\frac{A_0}{x^{n+1}}+\frac{A_1}{x^{n+1}}+\ldots=\frac{2c}{\sqrt{xF(x)}}-\frac{1}{3}\frac{c^3\varphi_2(x)}{\sqrt{x}\sqrt{F(x)^3}}$$

$$+\frac{3}{4.5}\frac{c^5(\varphi_2(x))^2}{\sqrt{x}\sqrt{F(x)^5}}-\ldots,$$

woraus leicht folgt, dass

$$A_0=2c.$$

Aus (12) folgt

$$c=\sqrt{x_1x_2\ldots x_{2n+1}}.$$

Demnach erhält man aus (IX):

$$\varepsilon_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 \psi(x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_{2n+1} \psi(x_{2n+1})$$
$$= C + 2\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{2n+1}}, \quad \text{(X)}$$

wenn

$$\psi(x) = \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{x \varphi_2(x)}}.$$

§. 9.

Man setze in §. 7.

$$X = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{-\frac{1}{2}a}{-a+x} + \frac{\frac{1}{2}a}{a+x},$$

so ist dort:

$$f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = -\frac{1}{2}a, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}a, \; n_1 = n_2 = 1,$$
$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = -a.$$

Ferner sei

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2), \quad c^2 \overline{\gtrless} 1,$$

und endlich seien $\theta(x)$ und $\theta_1(x)$ so beschaffen, dass die erste lauter gerade, die andere lauter ungerade Potenzen von x enthalte. Alsdann wird man setzen können:

$$F(x) = (\theta(x))^2 - (\theta_1(x))^2 \varphi_2(x) = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_r^2)$$

und also, wenn

$$\psi(x) = \int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{\varphi(x)}}:$$

$$\varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon'_1\psi(-x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \varepsilon'_2\psi(-x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_r\psi(x_r) + \varepsilon'_r\psi(-x_r)$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\varphi_2(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right) - \frac{a}{2\sqrt{\varphi_2(x)}}\log\left(\frac{\theta(-a)+\theta_1(-a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(-a)-\theta_1(-a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right) + C. \quad (13)$$

Da aber, der Annahme nach,

$$\theta_1(-a) = -\theta_1(a), \quad \theta(a) = \theta(-a);$$

so ist die zweite Seite:

$$\frac{a}{\sqrt{\varphi_2(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right) + C. \quad (14)$$

Die Vorzeichen ε_e und ε'_e bestimmen sich aus:

$$\theta(x_e) = \varepsilon_e \theta_1(x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)},$$
$$\theta(-x_e) = \varepsilon'_e \theta_1(-x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)}; \qquad (15)$$

also da

$$\theta_1(-x_e) = -\theta_1(x_e),$$

so ist $\varepsilon'_e = -\varepsilon_e$, und da auch

$$\psi(-x_e) = -\psi(x_e), \quad \varepsilon'_e\psi(-x_e) = \varepsilon_e\psi(x_e)$$

und folglich

$$\varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_r\psi(x_r)$$
$$= \frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}} \log\left(\frac{\theta(a) + \theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}{\theta(a) - \theta_1(a)\sqrt{\varphi_2(a)}}\right) + C, \qquad \text{(XI)}$$

wo ε_e durch die erste Gleichung (15) bestimmt ist.

Die hier betrachteten Funktionen $\psi(x)$ sind sogenannte elliptische Funktionen der dritten Art.

§. 10.

Setzt man im vorigen Paragraphen $a = \infty$ und also

$$\psi(x) = \int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so ist:

$$\varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_r\psi(x_r) = C. \qquad \text{(XII)}$$

Die hier betrachteten Funktionen sind elliptische Funktionen der ersten Art.

§. 11.

Bezeichnet man durch $K_n f(a)$ den Koeffizienten von a^{-n} in der Entwicklung von $f(a)$ nach fallenden Potenzen von a, so erhält man, wenn man beide Seiten der Gleichung (XI) nach fallenden Potenzen von a entwickelt und setzt

$$\psi(x) = \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \varphi(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2):$$

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)$$

$$=K_2\left[\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{\theta(a)+\theta_1(a)\sqrt{\varphi(a)}}{\theta(a)-\theta_1(a)\sqrt{\varphi(a)}}\right)\right]+C. \quad \text{(XIII)}$$

Die hier vorkommenden Funktionen sind elliptische Funktionen der zweiten Art. (Archiv. Theil XIII. S. 12.).

§. 12.

Man setze in §. 4.

$$f(x)=1,\quad \varphi_2(x)=-(x-m_1)(x-m_2)\ldots\ldots(x-m_{2n}),$$

$$\varphi_1(x)=(x-m_{2n+1})(x-m_{2n+2}),$$

$$\theta_1(x)=1,\quad \theta(x)=C(x-A_1)(x-A_2)\ldots.(x-A_{n-1});$$

so hat man zur Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots. x_{2n}$ die Gleichung:

$$C^2(x-A_1)^2(x-A_2)^2\ldots.(x-A_{n-1})^2(x-m_{2n+1})(x-m_{2n+2})$$
$$+(x-m_1)(x-m_2)\ldots.(x-m_{2n})=0, \quad (16)$$

deren Wurzeln jene Grössen sind. Ist also

$$\psi(x)=\int\frac{\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}},\quad \varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x);$$

so hat man:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots\ldots+\varepsilon_{2n}\psi(x_{2n})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)+C, \quad (17)$$

worin ε_e durch die Gleichung

$$\theta(x_e)\sqrt{\varphi_1(x_e)}=\varepsilon_e\sqrt{\varphi_2(x_e)}$$

bestimmt wird.

Setzt man

$$\varphi_2(x)=-\lambda(x),$$

so ist der zweite Theil der Gleichung (17):

$$C - \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}} \log\left(\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \sqrt{-1}\sqrt{\lambda(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \sqrt{-1}\sqrt{\lambda(\alpha)}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\theta(\alpha)\varphi_1(\alpha)}{\sqrt{\varphi_1(\alpha)\lambda(\alpha)}}\right) + C,$$

also ist

$$\varepsilon_1\psi(x_1) + \varepsilon_2\psi(x_2) + \ldots\ldots + \varepsilon_{2n}\psi(x_{2n})$$

$$= C + \frac{2}{\sqrt{-\varphi(\alpha)}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\theta(\alpha)\varphi_1(\alpha)}{\sqrt{-\varphi(\alpha)}}\right), \qquad \text{(XIV)}$$

wo

$$\varphi(x) = -(x-m_1)(x-m_2)\ldots\ldots(x-m_{2n+2}),$$

während ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{2n}$ auf die so eben angegebene Weise zu bestimmen sind.

§. 13.

Im Vorstehenden wurden $x_1, x_2, \ldots . x_r$ (§. 1. ff.) als Funktionen der Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n$; $c_0, c_1, \ldots c_m$ angesehen. Nun kann man umgekehrt einige der Grössen $x_1, x_2, \ldots$ als gegebene Veränderliche ansehen und aus ihnen die Grössen $a_0, a_1, \ldots$; $c_0, c_1 \ldots$ zu bestimmen suchen. Man sieht leicht, dass es der Allgemeinheit keinen Abbruch thut, wenn man eine dieser letztern gleich 1 setzt, so dass noch $m+n+1$ solcher Grössen übrig bleiben. Sei $m+n+1=r'$, und nehmen wir r (§. 1. (2)) gleich oder grösser als r', so kann man sämmtliche r' Grössen $a_0, \ldots a_n$; $c_0, \ldots c_m$, von denen eine gleich 1 ist, bestimmen durch die r' Gleichungen:

$$\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)} = \varepsilon_1\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)},$$

$$\theta(x_2)\sqrt{\varphi_1(x_2)} = \varepsilon_2\theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)},$$

$$\vdots$$

$$\theta(x_{r'})\sqrt{\varphi_1(x_{r'})} = \varepsilon_{r'}\theta_1(x_{r'})\sqrt{\varphi_2(x_{r'})};$$

in denen die Grössen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_{r'}$ beliebig gleich ± 1 gesetzt werden können. Man setze z. B.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ldots = \varepsilon_{r_1} = +1, \quad \varepsilon_{r_1+1} = \varepsilon_{r_1+2} = \ldots = \varepsilon_{r'} = -1;$$

so hat man zur Bestimmung von $a_0, a_1, \ldots . c_0, c_1, \ldots .$:

$$\left.\begin{aligned}
\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)} &= \theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)},\\
\theta(x_2)\sqrt{\varphi_1(x_2)} &= \theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)},\\
&\vdots\\
\theta(x_{r_1})\sqrt{\varphi_1(x_{r_1})} &= \theta_1(x_{r_1})\sqrt{\varphi_2(x_{r_1})},\\
\theta(x_{r_1+1})\sqrt{\varphi_1(x_{r_1+1})} &= -\theta_1(x_{r_1+1})\sqrt{\varphi_2(x_{r_1+1})},\\
&\vdots\\
\theta(x_{r'})\sqrt{\varphi_1(x_{r'})} &= \theta_1(x_{r'})\sqrt{\varphi_2(x_{r'})}.
\end{aligned}\right\} \quad (18.)$$

Diese Gleichungen geben nun die Werthe von $a_0', a_1, \ldots, c_0, c_1 \ldots$ vollständig als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_r (r \overline{\overline{>}} r')$, und der in $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ enthaltenen Koefficienten. Setzt man diese Werthe von $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ in die Gleichung (2), so wird ihre erste Seite durch $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{r'})$ theilbar, und man findet:

$$\frac{(\theta(x))^2\varphi_1(x)-(\theta_1(x))^2\varphi_2(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{r'})} = A(x-x_{r'+1})(x-x_{r'+2})\ldots(x-x_r) = R.$$

Setzt man nun:

$$x_{r'+1} = y_1, \; x_{r'+2} = y_2, \ldots x_r = y_s;$$

so sind $y_1, y_2, \ldots y_s$ die Wurzeln der Gleichung

$$R = 0, \qquad (19)$$

welche vom Grade $s = r - r'$ ist. Es wird somit immer möglich sein, diese Grössen zu bestimmen. Die nachfolgenden Grössen (± 1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_s$ ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\theta(y_1)\sqrt{\varphi_1(y_1)} &= \varepsilon_1\theta_1(y_1)\sqrt{\varphi_2(y_1)},\\
\theta(y_2)\sqrt{\varphi_1(y_2)} &= \varepsilon_2\theta_1(y_2)\sqrt{\varphi_2(y_2)},\\
&\vdots\\
\theta(y_s)\sqrt{\varphi_1(y_s)} &= \varepsilon_s\theta_1(y_s)\sqrt{\varphi_2(y_s)}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

und man findet (§. 7.), wenn man setzt:

$$\psi(x) = \int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

X, $\varphi(x)$ was in §. 7. und denselben Bedingungen genügend:

$$\begin{aligned}
&\psi(x_1)+\psi(x_2)+\ldots+\psi(x_{r_1})-\psi(x_{r_1+1})-\psi(x_{r_1+2})\ldots-\psi(x_{r'})\\
&\quad+\varepsilon_1\psi(y_1)+\varepsilon_2\psi(y_2)+\ldots+\varepsilon_s\psi(y_s) = V+C, \qquad (XV)
\end{aligned}$$

wo V sich aus §. 7. ergiebt.

Aehnlich kann man in die übrigen Formeln substituiren.

Sei ϱ_1 der Grad von $\varphi_1(x)$, ϱ_2 der von $\varphi_2(x)$, $\varrho=\varrho_1+\varrho_2$ der von $\varphi(x)$, so ist der Grad der Funktion $F(x)$ (§. 1.) entweder $2n+\varrho_1$ oder $2m+\varrho_2$; er sei z. B. $=2n+\varrho_1$, also

$$r=2n+\varrho_1$$

und folglich

$$r \overset{=}{>} 2m+\varrho_2,$$

mithin auch

$$2r \underset{=}{>} 2m+\varrho_2+2n+\varrho_1,$$

$$r \overset{=}{>} m+n+\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} \overset{=}{>} m+n+\frac{\varrho}{2},$$

also, da

$$s=r-r'=r-(m+n+1),$$

auch

$$s \overset{=}{>} m+n+\frac{\varrho}{2}-(m+n+1)$$

$$\overset{=}{>} \frac{\varrho}{2}-1.$$

Der kleinste Werth, den also s haben kann, ist $\frac{\varrho}{2}-1$, wenn ϱ gerade, und $\frac{\varrho-1}{2}$, wenn ϱ ungerade ist. Man sieht, dass dieser Werth von $m+n$ gar nicht abhängt.

§. 14.

Wir wollen ferner annehmen, man mache die Voraussetzung des §. 9., und nehmen wir an, in $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ seien gerade r Koeffizienten, also, da einer $=1$ zu setzen ist, ihrer $r-1$ zu bestimmen. Beiläufig bemerken wir auch, dass in §. 9. Alles dasselbe bleiben würde, wenn man annähme, in $\theta(x)$ seien nur ungerade und in $\theta_1(x)$ nur gerade Potenzen von x.

Sei nun r gerade, $=2n$.

Man setze:

$$\theta(x) = a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n},$$
$$\theta_1(x) = (b_0 + b_1 x^2 + \dots + b_{n-2} x^{2n-4})\, x,$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{2n-1} = -1$, so werden $a_0, \dots$ $b_0 \dots$ bestimmt durch:

$$\left.\begin{array}{l} \theta(x_1) + \theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)} = 0, \\ \theta(x_2) + \theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)} = 0, \\ \vdots \\ \theta(x_{2n-1}) + \theta_1(x_{2n-1})\sqrt{\varphi(x_{2n-1})} = 0 \end{array}\right\} \quad (21) \quad \varphi(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2),$$

wenn die $2n-1 = r-1$ Grössen x_1, $x_2, \dots x_{2n-1}$ als gegeben angesehen werden. Ist diese Bestimmung geschehen, so hat man in §. 7:

$$(\theta(x))^2 - (\theta_1(x))^2 \varphi(x) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_{2n-1}^2)(x^2 - y^2), \tag{22}$$

woraus leicht folgt:

$$y = \frac{a_0}{x_1 x_2 \dots x_{2n-1}}. \tag{23}$$

Sei zweitens r ungerade, $= 2n+1$.

Alsdann setze man:

$$\theta(x) = (a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^{2n})\, x,$$
$$\theta_1(x) = b_0 + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{2n-2};$$

bestimme ferner $a_0, \dots$ $b_0 \dots$ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \theta(x_1) + \theta_1(x_1)\sqrt{\varphi(x_1)} = 0, \\ \vdots \\ \theta(x_{2n}) + \theta_1(x_{2n})\sqrt{\varphi(x_{2n})} = 0; \end{array}\right\} \quad (24)$$

so erhält man

$$y = \frac{b_0}{x_1 x_2 \dots x_{2n}}. \tag{25}$$

Setzt man nun die Werthe von x_1, $x_2, \dots x_{r-1}$, y in die Formeln (XI.), (XII.), (XIII.), so erhält man Theoreme über die ellipti-

schen Funktionen. Dabei ist zu bemerken, dass $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots\ldots$ $=\varepsilon_{r-1}=-1$ genommen wurde, $x_r=y$, und ε_r aus der Gleichung

$$\theta(y)=\varepsilon_r\theta_1(y)\sqrt{\varphi(y)} \qquad (26)$$

bestimmt wird.

§. 15.

Setzt man, um ein Beispiel zu wählen, im vorigen Paragraphen $r=3$, so ist

$$\theta(x)=(a_0+x^2)x, \quad \theta_1(x)=b_0, \quad \varphi(x)=(1-x^2)(1-c^2x^2);$$

also werden a_0 und b_0 durch die Gleichungen

$$(a_0+x_1^2)x_1+b_0\sqrt{\varphi(x_1)}=0,$$

$$(a_0+x_2^2)x_2+b_0\sqrt{\varphi(x_2)}=0$$

bestimmt, woraus folgt:

$$a_0=\frac{x_2^3\sqrt{\varphi(x_1)}-x_1^3\sqrt{\varphi(x_2)}}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{(\varphi x_1)}}, \qquad b_0=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}};$$

$$y=\frac{b_0}{x_1x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}$$

$$=\frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}+x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1-c^2x_1^2x_2^2}, \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=-1.$$

Zur Bestimmung von ε_3 hat man:

$$(a_0+y^2)y=\varepsilon_3b_0\sqrt{\varphi(y)}, \quad (a_0+y^2)=\varepsilon_3x_1x_2\sqrt{\varphi(y)}.$$

Denken wir uns x_1, x_2 unendlich klein, so wird

$$\sqrt{\varphi(x_1)}=\sqrt{\varphi(x_2)}=1,$$

also (24) sind x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\theta(x)+\theta_1(x)=0,$$

d. h. von

$$(a_0+x^2)x+b_0=0.$$

Diese Gleichung hat noch eine dritte Wurzel z, und es ist offenbar

$$z x_1 x_2 = -b_0, \quad z = -y;$$

also ist

$$-(a_0 + y^2)y + b_0 = 0,$$
$$(a_0 + y^2)y = b_0;$$

also

$$1 = \varepsilon_3 \sqrt{\varphi(y)},$$

und für x_1, x_2 unendlich klein, auch $\sqrt{\varphi(y)} = 1$, ist $\varepsilon_3 = 1$.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung:

$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_1(x)$,

$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_2(x)$,

$\int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{\varphi(x)}}$ durch $F_3(x)$;

$\varphi(x) = (1-x^2)(1-c^2x^2)$

$c^2 \overset{=}{<} 1$, x_1 und x_2 nicht über 1 und unter -1:

so findet man nach (XII.), (XIII.) und (XI.):

(26)

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(x_1) + F_1(x_2) = F_1(y) + C, \\
&F_2(x_1) + F_2(x_2) = F_2(y) - K_2\left[\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a + b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a - b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right)\right] \\
&\qquad + C, \\
&F_3(x_1) + F_3(x_2) = F_2(y) - \frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a + b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a - b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right) + C;
\end{aligned}\right\}$$

worin:

$$y = \frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)} + x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a + b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a - b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right) = \frac{b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a} + \frac{1}{3}\left(\frac{b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a}\right)^3 + \ldots,$$

$$\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a + b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a - b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right) = \frac{b_0}{a_0+a^2} + \frac{1}{3}\,\frac{b_0^3\varphi(a)}{a^2(a_0+a^2)^3} + \ldots$$

Demnach ist der Koeffizient von $\frac{1}{a^2}$ gleich b_0, und folglich werden die obigen Gleichungen definitiv zu:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1)+F_1(x_2) &= F_1(y)+C, \\ F_2(x_1)+F_2(x_2) &= F_2(y)-b_0+C, \\ F_3(x_1)+F_3(x_2) &= F_3(y)-\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{(a_0+a^2)a+b_0\sqrt{\varphi(a)}}{(a_0+a^2)a-b_0\sqrt{\varphi(a)}}\right)+C \end{aligned}\right\}\text{(XVI.)}$$

worin

$$y=\frac{b_0}{x_1 x_2},$$

a_0, b_0 bestimmt durch die Formeln des §. 15. Die Formeln (XVI.) enthalten die Additionstheoreme für zwei elliptische Funktionen der verschiedenen Arten.

Da für $x_1=x_2=0$ auch $a_0=b_0=0$ und $y=0$, so sind die Konstanten in diesen Formeln Null, wenn man 0 als untere Gränze der Integration nimmt. Setzt man $x=\sin\varphi$, so ist

$$F_1(x)=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},\quad F_2(x)=\int_0^\varphi\frac{\sin\varphi^2\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

$$F_3(x)=\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Darnach stellen sich diese Gleichungen auch so dar:

(27)

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\int_0^{\psi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi^2\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\sin\varphi^2\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\int_0^{\psi}\frac{\sin\varphi^2\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}-\frac{\sin\varphi_2\sin\varphi_1{}^3-\sin\varphi_1\sin\varphi_2{}^3}{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2}-\sin\varphi_2\cos\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2}}, \tag{28}$$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\int_0^{\psi}\frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{a^2}\right)\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}} \tag{29}$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{\varphi(a)}}\log\left(\frac{a\sin\varphi_2{}^3\cos\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2}-a\sin\varphi_1{}^3\cos\varphi_2\sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2}+\sin\varphi_1\sin\varphi_2(\sin\varphi_1{}^2-\sin\varphi_2{}^2)\sqrt{\varphi(a)+a^2}}{a\sin\varphi_2{}^3\cos\varphi_1\sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2}-a\sin\varphi_1{}^3\cos\varphi_2\sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2}-\sin\varphi_1\sin\varphi_2(\sin\varphi_1{}^2-\sin\varphi_2{}^2)\sqrt{\varphi(a)+a^2}}\right)$$

worin ψ bestimmt ist durch:

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_2{}^2} + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \sqrt{1-c^2\sin\varphi_1{}^2}}{1-c^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2}. \tag{30}$$

Die Gleichung (30) ist nichts Anderes als die Gleichung (1) in Archiv Theil XI. S. 395. ff. §. 4.

Die Integrale in (28) gehören zu den in Archiv Theil XIII. S. 12. ff. betrachteten und zwar zu der dortigen Gattung $\int_0^v \mathrm{sn}^2 v\partial v$; die in (29) zu den dort S. 19. ff. betrachteten.

Bezeichnen wir den Werth von

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \tag{31}$$

durch v, so ist (Archiv Theil XI. S. 395. ff. §. 2.) $x = \mathrm{sn}v$, wenn c der Modulus ist, während die obige Grösse φ nichts anderes als die Amplitude von v ist. Bezeichnen wir durch v_1, v_2, w das, was aus (31) wird, wenn man x_1, x_2, y an die Stelle von x setzt, so giebt die Gleichung (27) oder die erste (XVI.):

$$v_1 + v_2 = w,$$

während $\sin\psi = \mathrm{sn}w$, $\sin\varphi_1 = \mathrm{sn}v_1$, $\sin\varphi_2 = \mathrm{sn}v_2$; also nach (30):

$$\mathrm{sn}(v_1+v_2) = \frac{\mathrm{sn}v_1\,\mathrm{cn}v_1\,\mathrm{dn}v_2 + \mathrm{sn}v_2\,\mathrm{cn}v_1\,\mathrm{dn}v_1}{1-c^2\mathrm{sn}^2v_1\,\mathrm{sn}^2v_2}, \tag{32}$$

was absolut die Gleichung (1) des §. 5. a. a. O. ist. Von dieser ausgehend, ist die ganze dortige Theorie leicht zu entwickeln.

Da aber für x_1, x_2 keine besonderen Bezeichnungen festgestellt wurden, so gilt die Formel (32) für alle möglichen Werthe von x_1 und x_2, so wie von c, was die Herleitung der Formeln der §. 6. und §. 11. sehr erleichtert.

Die Grösse

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

wurde in Archiv Theil XIII. S. 1. ff. §. 18. durch $\int_0^v \mathrm{sn}^2 v\partial v$ bezeichnet, worin v den obigen Werth hat. Diese letztere Grösse fand sich dort

$$\frac{1}{c^2}(v - E(v)),$$

also giebt (28) oder die zweite Gleichung (XVI.):

$$E(v_1) + E(v_2) = E(v_1 + v_2) + \frac{c^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 (\operatorname{sn}^2 v_1 - \operatorname{sn}^2 v_2)}{\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2 - \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1}$$
$$= E(v_1 + v_2) + c^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{sn}(v_1 + v_2),$$

was eben die Gleichung (1) in §. 19. a. a. O. ist.

Auch hier ist keine Beschränkung für die Werthe vorhanden.

Eben so gehört endlich $F_3(x)$ (XVI.) zu den mit J in §. 23. a. a. O. bezeichneten Funktionen der dritten Art, und zwar ist sie:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 v}{a^2}}.$$

Ist also

$$a^2 = \frac{1}{c^2 \operatorname{sn}^2 b},$$

so ist sie gleich

$$v + c^2 \operatorname{sn}^2 b J(v, b)$$

nach (4) des angeführten §. 23. Die Gleichung (29) drückt dann ebenfalls eine Summirungsformel dieser Grössen aus, deren Entwicklung nicht schwer ist. Dass hieraus die Theorie der drei Arten elliptischer Funktionen fliesst, ist klar. Das Gesagte mag aber für den Augenblick genügen.

Es bleibt uns zum Schlusse noch die in §. 1. versprochene Entwicklung der vor (11) stehenden Gleichung übrig.

Der schönste Beweis ist wohl der, den Liouville in seinem Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome XI. pag. 462. gegeben, der auf das Folgende herauskommt. Man habe die Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$, so beschaffen, dass

$$\psi(x) = x^m + a_0 x^{m-1} + \dots.$$

$$\varphi(x) = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \dots$$

dass also, wenn b_0, b_1,... nicht Null sind, $\varphi(x)$ vom Grade $m-1$ ist, wenn $\psi(x)$ vom Grade m. Sei nun β irgend eine Grösse, so bestimmt, dass

$$\psi(x)+\beta\varphi(x)=0, \tag{33}$$

und bezeichne $\Sigma(x)$ die Summe der Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\Sigma(x)=-a_0-b_0\beta,$$

also, da diese Wurzeln von β abhängen:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial\beta}=-b_0. \tag{34}$$

Differenzirt man aber (33) in Bezug auf β, so ist

$$[\psi'(x)+\beta\varphi'(x)]\frac{\partial x}{\partial\beta}+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\beta}=-\frac{\varphi x}{\psi'(x)+\beta\varphi'(x)}.$$

Demnach in (34):

$$\Sigma\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)+\beta\varphi'(x)}=+b_0. \tag{35}$$

Da β ganz willkührlich ist, so setzen wir es $=0$, so ist:

$$\Sigma\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}=b_0, \tag{36}$$

oder wenn $\varphi(x)=1$, also $b_0=0$:

$$\Sigma\frac{1}{\psi'(x)}=0. \tag{37}$$

Sei nun

$$\psi(x)=(x-\alpha)F(x),$$

und habe $F(x)$ die Wurzeln x_1, x_2,.... x_r, so ist

$$\psi'(x)=F(x)+(x-\alpha)F'(x),$$

und die Gleichung (37) heisst eigentlich:

$$\frac{1}{F(\alpha)} + \frac{1}{(x_1-\alpha)F'(x_1)} + \frac{1}{(x_2-\alpha)F'(x_2)} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(x_r-\alpha)F'(x_r)} = 0,$$

da α, $x_1, \ldots x_r$ die Wurzeln von $\psi(x)=0$ sind. Diess ist aber

$$\frac{1}{(x_1-\alpha)F'(x_1)} + \frac{1}{(x_2-\alpha)F'(x_2)} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(x_r-\alpha)F'(x_r)} = -\frac{1}{F(\alpha)},$$

also wenn das Zeichen Σ sich bloss auf die Wurzeln von $F(x)=0$ bezieht:

$$\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'(x)} = -\frac{1}{F(\alpha)}, \qquad (38)$$

was eben die zu beweisende Gleichung ist.

VIII.

De Integralibus quibusdam definitis.

Auctor Christianus Fr. Lindman,
Lector Strengnesensis.

1.

In Tom. VI. praec. pag. 187. seqq. Cel. Arndt integralia definita

$$\int_0^{n\pi} l\,\mathrm{Sin}\varphi d\varphi, \quad \int_0^{n\pi} \varphi l \sin\varphi d\varphi$$

tractat, ubi $n=$ num. integro. Beneficio theorematis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{b-a} f(a-x)\,dx \,\ldots\ldots\ldots\, (\alpha)$$

quod in Tom. IV. praec. pag. 119. commemoratum et in Calc. integr. Cel. Moigno pag. 45. quoque inest, illa integralia paullo brevius inveniri videntur, ita ut sequitur.

Ut maximam generalitatem consequamur, pro $l\mathrm{Sin}\varphi$ ponamus

$$l((\mathrm{Sin}\varphi)) = l\mathrm{Sin}\varphi \pm 2k\pi\sqrt{-1}$$

et pro $l(-\mathrm{Sin}\,\varphi)$ itidem

$$l((-\mathrm{Sin}\varphi)) = l\mathrm{Sin}\varphi \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\,{}^{*}).$$

Ex theoremate (α) habebimus

---

*) Vide Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, pag. 319.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi}{2} l\frac{1}{2} \pm k\pi^2\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi}{2} l\frac{1}{2} \pm \frac{2\lambda+1}{2}\pi^2\sqrt{-1}\,^{*)};$$

unde beneficio theorematis notissimi inveniemus:

$$\int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((\text{Sin}\,\varphi))\,d\varphi$$

$$= \pi\, l\frac{1}{2} \pm 2k\pi^2\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\pi} l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\text{Sin}\varphi))\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} l((-\text{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi\, l\frac{1}{2} \pm (2\lambda+1)\pi^2\sqrt{-1}.$$

Ex theoremate nuper citato sequitur, ut sit

$$\int_0^{n\pi} l((\text{Sin}\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi + \ldots$$

$$\ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi.$$

Quum vero secundum theorema (α) sit (m = num integro):

$$\int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} l((\text{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\pi} l((\text{Sin}\,(2m\pi-\varphi)))d\varphi = \int_0^{\pi} l((-\text{Sin}\varphi))d\varphi,$$

$$\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} l((\text{Sin}\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l((\text{Sin}(\overline{2m+1},\pi-\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} l((\text{Sin}\varphi))\,d\varphi;$$

habebimus:

---

*) Vide Grunert Archiv Tom. IV. pag. 120.

dum est $n=$ num. par $=2m$

$$\int_0^{2m\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = m\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + m\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= m\pi\{2l\tfrac{1}{2} \pm 2k\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\};$$

dum est $n=$ num. imp. $=2m+1$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = (m+1)\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + m\int_0^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi\{(2m+1)l\tfrac{1}{2} \pm 2k(m+1)\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)m\pi\sqrt{-1}\}.$$

Jam facillime inveniri potest $\int_0^{n\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$ ($n=$num. integ.). Existit enim

$$\int_0^{n\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \int_0^{\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi + \ldots .$$

$$\ldots . + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

et, si est $r=$ num. integro, secundum theorema (α) fit

$$\int_{(2r-1)\pi}^{2r\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = 2r\pi\int_0^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi \ldots\ldots (\beta)$$

$$\int_{2r\pi}^{(2r+1)\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = (2r+1)\pi\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi \ldots . (\gamma)$$

Praeterea est*)

$$\int_0^{\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\, l\frac{1}{2} \pm k\pi^3\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\pi} \varphi l((-\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\, l\frac{1}{2} \pm \frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}.$$

Si ad invenienda integralia, in quae integrale quaesitum distributum est, formulae (β) et (γ) adhibentur, addendo et reputando, coëfficientes termini harum formularum prioris in progressione arithmetica esse obtinebimus:

---

*) Vide Grunert, Archiv. l. c.

$(n = \text{num. par.} = 2m)$

$$\int_0^{2m\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \pi^2 m \{2ml\frac{1}{2} \pm k\pi(2m-1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}(2m+1)\pi\sqrt{-1}\}$$

$(n = \text{num. imp.} = 2m+1)$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi^2(2m+1)\left\{\frac{2m+1}{2}l\frac{1}{2} \pm k\pi(m+1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}m\pi\sqrt{-1}\right\}.$$

II.

In Tom. X praec. pag. 341. Cel. Dienger proposuit integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4}$, quod casus tantum est specialis integralis generalioris

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2(n-1)}},$$

quod hoc modo inveniri potest. Termini denominatoris sunt in progressione geometrica, cujus summa est $= \frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$, quamobrem evadit

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-x^2)x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} - \int_0^\infty \frac{x^{a+1}dx}{1-x^{2n}}.$$

Posito $x^{2n} = y$, ideoque $x = y^{\frac{1}{2n}}$, $dx = \frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}dy$, habebimus

$$J = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a}{2n}-1}dy}{1-y} - \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a+2}{2n}-1}dy}{1-y}.$$

Ex cognita vero formula*)

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1-z} = \pi\mathrm{Cot}\alpha\pi, \quad 1 > \alpha > 0$$

sequitur, ut sit

*) Vid. ex. gr. Moigno, Calc. integr. pag. 69.

dum est $n=\text{num. par}=2m$

$$\int_0^{2m\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = m\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi + m\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

$$= m\pi\{2l\tfrac{1}{2} \pm 2k\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\};$$

dum est $n=\text{num. imp.}=2m+1$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = (m+1)\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi + m\int_0^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

$$= \pi\{(2m+1)l\tfrac{1}{2} \pm 2k(m+1)\pi\sqrt{-1} \pm (2\lambda+1)m\pi\sqrt{-1}\}.$$

Jam facillime inveniri potest $\int_0^{n\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$ (n=num. integ.). Existit enim

$$\int_0^{n\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = \int_0^{\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi$$

et, si est $r=$ num. integro, secundum theorema (α) fit

$$\int_{(2r-1)\pi}^{2r\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = 2r\pi\int_0^{\pi} l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi \ldots\ldots (\beta)$$

$$\int_{2r\pi}^{(2r+1)\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = (2r+1)\pi\int_0^{\pi} l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi \ldots\ldots (\gamma)$$

Praeterea est*)

$$\int_0^{\pi} \varphi\, l((\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\, l\frac{1}{2} \pm k\pi^3\sqrt{-1},$$

$$\int_0^{\pi} \varphi l((-\mathrm{Sin}\varphi))\,d\varphi = \frac{\pi^2}{2}\, l\frac{1}{2} \pm \frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}.$$

Si ad invenienda integralia, in quae integrale quaesitum distributum est, formulae (β) et (γ) adhibentur, addendo et reputando, coëfficientes termini harum formularum prioris in progressione arithmetica esse obtinebimus:

*) Vide Grunert, Archiv. l. c.

$(n = \text{num. par.} = 2m)$

$$\int_0^{2m\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi = \pi^2 m \{2ml\frac{1}{2} \pm k\pi(2m-1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}(2m+1)\pi\sqrt{-1}\}$$

$(n = \text{num. imp.} = 2m+1)$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} \varphi l((\mathrm{Sin}\varphi))d\varphi$$

$$= \pi^2(2m+1)\left\{\frac{2m+1}{2}l\frac{1}{2} \pm k\pi(m+1)\sqrt{-1} \pm \frac{2\lambda+1}{2}m\pi\sqrt{-1}\right\}.$$

II.

In Tom. X praec. pag. 341. Cel. Dienger proposuit integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4}$, quod casus tantum est specialis integralis generalioris

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2(n-1)}},$$

quod hoc modo inveniri potest. Termini denominatoris sunt in progressione geometrica, cujus summa est $= \frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$, quamobrem evadit

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-x^2)x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x^{2n}} - \int_0^\infty \frac{x^{a+1}dx}{1-x^{2n}}.$$

Posito $x^{2n} = y$, ideoque $x = y^{\frac{1}{2n}}$, $dx = \frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}dy$, habebimus

$$J = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a}{2n}-1}dy}{1-y} - \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a+2}{2n}-1}dy}{1-y}.$$

Ex cognita vero formula*)

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1-z} = \pi\,\mathrm{Cot}\,\alpha\pi, \quad 1 > \alpha > 0$$

sequitur, ut sit

---

*) Vid. ex. gr. Moigno, Calc. integr. pag. 69.

$$J = \frac{\pi}{2n}\left\{\text{Cot}\,\frac{a\pi}{2n} - \text{Cot}\,\frac{(a+2)\pi}{2n}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\,\frac{\text{Sin}\,\frac{\pi}{n}}{\text{Sin}\,\frac{a\pi}{2n}\,\text{Sin}\,\frac{(a+2)\pi}{2n}},\ 2(n-1) > a > 0. \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

Formula (i) differentianda respectu ipsius a prodit

$$\int_0^\infty \frac{(1-x^2)x^{a-1}l\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^{2n}}\,dx = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \frac{\text{Sin}\,\frac{(a+1)\pi}{n}\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{n}}{\text{Sin}^2\frac{a\pi}{2n}\,\text{Sin}^2\frac{(a+2)\pi}{2n}}.$$

Hic posito $x = y^{\frac{1}{n}}$ prodit

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{\frac{2}{n}})\,y^{\frac{a}{n}-1}\,ly}{1-y^2}\,dy = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\text{Sin}\,\frac{(a+1)\pi}{n}\,\text{Sin}\frac{\pi}{n}}{\text{Sin}^2\frac{a\pi}{2n}\text{Sin}^2\frac{(a+2)\pi}{2n}} \quad \ldots\ldots (k)$$

Si ponimus $a = n-2$, invenimus

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{-\frac{2}{n}})\,ly}{1-y^2}\,dy = \left(\frac{\pi}{2}\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

ubi necesse est, sit $n > 2$, quia alioquin a evadit $= < 0$. Cel. Schlömilch hanc formulam proposuit in Tom. XII. praec. pag. 208, ubi contendit fieri non posse, quin quantitas μ sit fractio propria negativa. Quod per μ designat, idem est atque $-\frac{2}{n}$ in formula mea. At vero quum $2(n-1) > a > 0$ esse debeat, ut antea demonstratum est, nihil prorsus impedire videtur, quominus in formula (k) ex. gr. $a = n$ ponatur, dummodo sit $n > 2$. Haec suppositio dabit

$$\int_0^\infty \frac{(1-y^{\frac{2}{n}})\,ly}{1-y^2}\,dy = \left(\frac{\pi}{2}\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Eodem modo, quo integrale (i) inventum est, cognoscere quoque licet

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}.$$



Enimvero quum termini denominatoris sint in progressione geometrica, cujus summa est $=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1-x^2}$, evadit

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x^2+x^4\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)\,x^{a-1}dx}{1-(-1)^n x^{2n}}.$$

Substituendo y pro x^{2n} et formulis cognitis*)

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\alpha\pi}, \quad \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1-z} = \pi \operatorname{Cot}\alpha\pi, \quad 1 > \alpha > 0$$

adhibendis, hac pro $n=$ num. par., illa pro $n=$ num. imp., invenitur:

$$\left.\begin{array}{c}(n=\text{num. par.})\\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{(1+x^2)x^{a-1}}{1-x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{Cot}\frac{a\pi}{2n} + \operatorname{Cot}\frac{(a+2)\pi}{2n}\right)\\ n=\text{num. imp.}\\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{(1+x^2)x^{a-1}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{a\pi}{2n}} + \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{(a+2)\pi}{2n}}\right)\end{array}\right\} 2(n-1) > a > 0.$$

III.

Facillime inveniuntur integralia $(\alpha > 0)$

$$\int_0^\alpha \operatorname{Sin} uy\,dy = \frac{1-\operatorname{Cos}\alpha u}{n} \ (1), \quad \int_0^\alpha \operatorname{Cos} uy\,dy = \frac{\operatorname{Sin}\alpha u}{n} \ \ldots\ldots (2)$$

quae multiplicata per $e^{-cu}du$ ($c=$ quant. posit.), integratione ab $u=0$ usque ad $u=\infty$ facta, dabunt:

$$\int_0^\infty e^{-cu}du \int_0^\alpha \operatorname{Sin} uy\,dy = \int_0^\infty \frac{1-\operatorname{Cos}\alpha u}{u} e^{-cu}\,du,$$

$$\int_0^\infty e^{-cu}du \int_0^\alpha \operatorname{Cos} uy\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-cu}\operatorname{Sin}\alpha u}{u}du.$$

Ordine integrationum permutato, beneficio formularum

*) Vid. Moigno l. c.

$$\int_0^\infty e^{-ax} \mathrm{Sin}\, bx\, dx = \frac{b^2}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \mathrm{Cos}\, bx dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

inveniemus:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu} \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\alpha u}{u} du = \frac{1}{4} l\left(1 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu} \mathrm{Sin}\, \alpha u}{u} du = \mathrm{Arc\, tg} \frac{\alpha}{c} \text{*)} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Posito $c=0$ in formula (4), habebimus formulam cognitam

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, \alpha u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Si my pro y in formula (1) substituitur, differentiatio respectu m dabit

$$\int_0^{\frac{\alpha}{m}} y\, \mathrm{Cos}\, muy dy = \frac{\alpha}{m^2} \frac{\mathrm{Sin}\, \alpha u}{u} - \frac{2}{m^2} \frac{\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\alpha u}{u^2}.$$

Hoc quoque integrali per $e^{-cu} du$ multiplicato et integratione intra limites $u=0$, $u=\infty$ instituta, prodit:

$$\int_0^\infty e^{-cu} du \int_0^{\frac{\alpha}{m}} y\, \mathrm{Cos}\, muy dy$$

$$= \frac{\alpha}{m^2} \int_0^\infty \frac{e^{-cu} \mathrm{Sin}\, \alpha u}{u} du - \frac{2}{m^2} \int_0^\infty \frac{e^{-cu} \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\alpha u}{u^2} du.$$

Ordine integrationum permutando et formula (4) recordanda obtinebimus

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cu} \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\alpha u}{u^2} du = \frac{\alpha}{2} \mathrm{Arc\, tg} \frac{\alpha}{c} - \frac{c}{4} l\left(1 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \ldots\ldots (5)$$

Posito $\alpha=2$, $c=0$, form. (5) dabit, quia $\frac{c}{4} l\left(1 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right) = 0$ pro $c=0$,

---

*) Hoc integrale Cel. Arndt aliunde procedens invenit in Tom. XI. praec. pag. 77.



$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

quod integrale etiam hoc modo probari potest. Per partes integrando reperiemus

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^2 u}{u^2} du = -\frac{\operatorname{Sin}^2 u}{u} + \int \frac{\operatorname{Sin} 2u}{u} du,$$

quod intra limites 0 et ∞ sumtum formulam (6) suppeditat. Enimvero quum $\operatorname{Sin} u$ pro $n=\infty$ indeterminatus evadat, limites tamen $+1$ et -1 supergredi nequeat, fiat $\frac{\operatorname{Sin}^2 u}{u}=0$ pro $u=\infty$, necesse est.

IV.

De integrali

$$J=\int_0^{\infty} \frac{lx\,dx}{(a^2+b^2x^2)^n}.$$

Posito $x=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi$ accipimus

$$J=\frac{1}{a^{2n-1}b}\,l\frac{a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2(n-1)}\psi\,d\psi+\frac{1}{a^{2n-1}b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2(n-1)}\psi\, l\operatorname{tg}\psi\,d\psi.$$

Cognitum vero est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2(n-1)}\psi\,d\psi=\frac{1.3\,.....(2n-3)}{2^{n-1}.1.2...(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et per partes integrando invenimus

$$\int \operatorname{Cos}^{2(n-1)}\psi\, l\operatorname{tg}\psi\,d\psi$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}\psi}{2(n-1)}\Big\{\operatorname{Cos}^{2n-3}\psi+\frac{2n-3}{2(n-2)}\cdot\operatorname{Cos}^{2n-5}\psi+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{3.5\ldots(2n-5)\,(2n-3)}{2^{n-2}.1.2.3\ldots(n-2)}\operatorname{Cos}\psi\Big\}\,l\operatorname{tg}\psi$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-5)\,(2n-3)}{2^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)}\,\psi\, l\operatorname{tg}\psi$$

$$-\frac{1}{2(n-1)}\int d\psi\left\{\mathrm{Cos}^{2(n-2)}\psi+\frac{2n-3}{2(n-2)}\mathrm{Cos}^{2(n-3)}\psi+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{3.5\ldots(2n-5)(2n-3)}{2^{n-2}.1.2.3\ldots(n-2)}\right\}$$
$$-\frac{1.3.5\ldots(2n-5)(2n-3)}{2^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)}\int\frac{\psi d\psi}{\mathrm{Sin}\psi\mathrm{Cos}\psi}.$$

Quum hoc integrale intra limites sumitur, prima pars dextri membri evanescit, quoniam $\mathrm{Sin}\psi l\mathrm{tg}\psi=0$ pro $\psi=0$, et $\mathrm{Cos}^{2q+1}\psi l\mathrm{tg}\psi=0$ pro $\psi=\frac{\pi}{2}$: terminus secundus et quartus simul sumti aequales sunt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\mathrm{tg}\psi d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\,\mathrm{Sin}\psi\,d\psi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}l\mathrm{Cos}\psi d\psi=0,$$

quamobrem existit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi l\,\mathrm{tg}\,\psi d\psi$$
$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^{n-1}}\left\{\frac{1.3\ldots(2n-5)}{1.2\ldots(n-2)}+\frac{2n-3}{n-2}\cdot\frac{1.3\ldots(2n-7)}{1.2.3\ldots(n-3)}+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3.5\ldots.(2n-5)(2n-3)}{1.2.3\ldots.(n-2)}\right\}$$
$$=-\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3..(n-1)}\cdot\frac{\pi}{2^n}\left\{\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}+\ldots+\frac{1}{3}+1\right\}$$
$$=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\{C+2Z'(2.\overline{n-1})-Z'(n-1)\},\ (C=0{,}5772\ldots)$$

si functio Γ et $Z'(a)=\frac{d}{da}l\Gamma(a)$ introducuntur.

Quum vero sit

$$2Z'(2a)-Z'(a)=\frac{d}{da}l\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)}=\frac{d}{da}l\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}-2a}}=Z'\left(a+\frac{1}{2}\right)+2l2,$$

reperitur

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}^{2(n-1)}\psi\,l\,\mathrm{tg}\,\psi d\psi=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\{C+Z'\left(n-\frac{1}{2}\right)+2l2\}.$$



unde denique

$$J = \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{a^{2n-1}b\,\Gamma(n)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left\{2l\frac{a}{2b} - C - Z'\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Quaestiones ad tirones exercendos.

1. Invenire conditiones necessarias, ut num. integer

$$10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots\ldots + 10^2 k + 10 l + m.$$

divisibilis sit per 3, 9, 11. (Applicatio Theor. binom.)

2. Geometricum invenire locum intersectionum linearum, quae per duos angulos trianguli rectilinei ductae latera opposita sub eodem angulo aut in eandem rationem secent.

3. Invenire triangulum aequicrurum maximum, quod in segmento circulari dato describi possit, ita ut vertex unius anguli in eo puncto jaceat, ubi chorda in duas partes aequales divisa est.

4. Demonstrare formulam integralem

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{\operatorname{Cos}x \operatorname{Cos}(a-x)} = \frac{a}{\operatorname{Sin}a}\, l \operatorname{Sec} a. \left(a < \frac{\pi}{2}\right).$$

IX.

Ueber die Durchschnitts - Curven zweier Flächen des zweiten Grades mit mehrfachen Punkten.

Von dem

Herrn Doctor Beer,

Privatdocenten an der Universität zu Bonn.

Unter den Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades, die ihrer Mannigfaltigkeit wegen eben so schwer einen Ueberblick gestatten, als sie sich in Folge ihrer doppelten Krümmung einer klaren Vorstellung entziehen, bieten diejenigen noch die meisten Anhaltspunkte dar, welche mit der einfachsten Singularität, dem Doppelpunkte, versehen sind. Für sie nämlich tritt eine natürliche, d. h. eine durch die Natur der Curve selbst gegebene, Projections-Ebene und ein ebenfalls natürlicher Mittelpunkt der Perspective entgegen, wir meinen bezüglich die durch die Tangenten des Doppelpunktes bestimmte Ebene und den letzteren selbst; dazu kommt, dass sich für die Beziehungen zwischen der Projection der Curve auf die eben erwähnte Ebene und den sich schneidenden Flächen ein fasslicher Ausdruck findet, der obendrein die Classification dieser Curven unmittelbar liefert.

1. Zwei Flächen des zweiten Grades und eine Ebene haben im Allgemeinen und also höchstens vier Punkte gemein, den Fall ausgeschlossen, wo die Flächen sich in ebenen Curven, in Kegelschnitten, schneiden und somit unendlich viele Punkte gleichzeitig auf den drei Oertern liegen können. Eine Folge dieses Factums ist, dass die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades höchstens zwei Doppelpunkte, keinen dreifachen Punkt und unter den mehrfachen Punkten höchstens einen vierfachen Punkt aufweist. Legt man durch zwei hiernach als möglich

denkbare Doppelpunkte und einen dritten Punkt einer solchen Curve eine Ebene, so müssen alle Punkte, in welchen diese die eine Fläche schneidet, auch auf der zweiten Fläche liegen. Die beiden Flächen schneiden sich folglich in einer ersten, mithin auch in einer zweiten ebenen Curve. Besitzt also die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades zwei Doppelpunkte, so besteht sie aus zwei Kegelschnitten, die sich in den beiden Doppelpunkten schneiden oder die zusammenfallen und die Doppelpunkte aufnehmen.*)

---

*) Zu diesem Resultate gelangt man auf dem Wege der Rechnung durch folgendes Verfahren, wobei nur der allgemeine Fall vor Augen gehalten wird Es seien P und P' die beiden Doppelpunkte; in ihnen fallen alsdann die Tangential-Ebenen der beiden sich schneidenden Flächen zusammen (2). Diese Tangential-Ebenen nehme man zu Ebenen der xz und yz, ihre Durchschnittslinie also zur z-Axe, und man lege die x-Axe und z-Axe resp. durch P und P'. In Bezug auf dieses Coordinaten-System seien die Gleichungen der beiden Flächen:

$$f \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + 1 = 0$$

und

$$f' \equiv a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'xy + e'xz + f'yz + g'x + h'y + k'z + 1 = 0.$$

Da nun die x-Axe sowohl, als auch die y-Axe die eine wie die andere Fläche berührt, so ist:

$$g^2 - 4a = 0,\ g'^2 - 4a' = 0;\ h^2 - 4b = 0,\ h'^2 - 4b' = 0;$$
$$a = a';\ b = b'.$$

Die Coordinaten des Punktes P sind alsdann $z=0$, $y=0$, $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$, die des Punktes P' $z=0$, $x=0$, $y=-\frac{1}{\sqrt{b}}$. Und weil die Ebene xz beide Flächen in P berührt, so ist für die Coordinaten dieses Punktes

$$\frac{df}{dy}=0,\ \frac{df}{dz}=0,\ \frac{df'}{dy}=0,\ \frac{df'}{dz}=0,$$

sowie andererseits, da auch die Ebene yz gemeinschaftliche Tangential-Ebene beider Flächen ist, die Coordinaten des Punktes P' den folgenden Gleichungen Genüge thun müssen:

$$\frac{df}{dx}=0,\ \frac{df}{dz}=0,\ \frac{df'}{dx}=0,\ \frac{df'}{dz}=0.$$

Ausser den bereits gefundenen erhalten wir hiernach noch folgende Bedingungen:

$$-\frac{e}{\sqrt{a}}+k=0,\ -\frac{e'}{\sqrt{a'}}+k'=0,\ -\frac{f}{\sqrt{b}}+k=0,\ -\frac{f'}{\sqrt{b'}}+k'=0,$$

so dass die Gleichungen der beiden Flächen, wenn nur die nöthigen Constanten beibehalten werden, in folgende übergehen:

$$f \equiv ax^2+by^2+cz^2+dxy+k\sqrt{a}.xz+k\sqrt{b}.yz+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y+kz+1=0,$$
$$f' \equiv ax^2+by^2+c'z^2+d'xy+k'\sqrt{a}.xz+k'\sqrt{b}.yz+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y$$
$$+k'z+1=0.$$



Denken wir uns, was dem Obigen gemäss noch gestattet ist, die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem dreifachen Punkte versehen, so schneiden sich in diesem drei verschiedene Aeste. Wenn daher durch den singulären Punkt eine Ebene gelegt wird, welche zwei dieser Aeste schneidet, so muss sie die letzteren ganz enthalten, da sonst einer Ebene und zwei Flächen des zweiten Grades fünf und nicht mehr Punkte gemein wären. Die beiden Flächen schneiden sich hiernach in einer ebenen Curve, mithin auch in einer zweiten ebenen Curve, die aus dem dritten Curvenzweige und einer vierten Geraden bestehen muss. Diese Gerade liegt, da die soeben angestellte Betrachtung auf je zwei der drei Aeste übertragen werden kann, mit einem jeden der letzteren in derselben Ebene, d. h. sie geht durch den singulären Punkt. Die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades kann nie einen dreifachen Punkt besitzen; weist sie einen vierfachen Punkt auf, so besteht sie aus vier geraden Linien, die sich in demselben Punkte schneiden. Von diesen Geraden kann ein Paar oder beide Paare imaginär werden. Wir unterscheiden dem Obigen gemäss folgende Arten der Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades:

1) Die Curve besitzt keinen mehrfachen Punkt.

2) Sie weist einen einzigen Doppelpunkt oder einen einzigen vierfachen Punkt auf.

3) Sie hat zwei Doppelpunkte und besteht alsdann aus zwei reellen oder imaginären Kegelschnitten, die sich in den Doppelpunkten schneiden

---

Für die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades, die den Durchschnitt von f und f' aufnimmt, ergibt sich hieraus:

$$f+\lambda f' \equiv (ax^2+by^2+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y+1) + \frac{d+\lambda d'}{1+\lambda}.xy + \frac{c+\lambda c'}{1+\lambda}.z^2 + \frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}\sqrt{a}.xz + \frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}\sqrt{b}.yz + \frac{k+\lambda k'}{1+\lambda}.z = 0.$$

Vergleichen wir die linke Seite dieser Gleichung mit dem Ausdrucke

$$\varphi \equiv (\sqrt{a}.x+\sqrt{b}.y+\alpha z+1)(\sqrt{a}.x+\sqrt{b}.y+\alpha' z+1)$$
$$\equiv (ax^2+by^2+2\sqrt{a}.x+2\sqrt{b}.y+1)+2\sqrt{ab}.xy + \alpha\alpha' z^2+(\alpha+\alpha')\sqrt{a}.xz+(\alpha+\alpha')\sqrt{b}.yz+(\alpha+\alpha')z,$$

so leuchtet ein, dass jene auf die Form von φ gebracht werde, wenn man λ, α und α' so wählt, dass sei:

$$\frac{d+\lambda d'}{1+\lambda} = 2\sqrt{ab}, \quad \alpha\alpha' = \frac{c+\lambda c'}{1+\lambda}, \quad \alpha+\alpha' = \frac{k+k'\lambda}{1+\lambda}.$$

$\varphi=0$ stellt aber alsdann zwei Ebenen dar, deren Durchschnitt die Punkte P und P' enthält, woraus wir entnehmen, dass sich die Flächen f und f' in zwei ebenen Curven schneiden.

4) Jeder Punkt der Durchschnitts-Curve ist ein Doppelpunkt, und die Flächen schneiden sich in zusammenfallenden ebenen Curven, d. h. sie berühren sich in einem Kegelschnitte.

Bei den im Folgenden mitgetheilten Entwicklungen haben wir aus den im Eingange vorgeführten Gründen unser Augenmerk nur auf den zweiten Fall gerichtet, dessen analytische Auffassung die Fälle 3) und 4) involvirt.

2. In dem Punkte P, der den beiden Flächen f und f' vom zweiten Grade gemein ist, seien an diese Tangential-Ebenen e und e' gelegt. Der Durchschnitt von e und e' berührt den der Flächen f und f', so dass die Tangente dieser Curve in dem Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z seien, durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$e \equiv \frac{df}{dx}(x-x_1) + \frac{df}{dy}(y-y_1) + \frac{df}{dz}(z-z_1) = 0,$$

$$e' \equiv \frac{df'}{dx}(x-x_1) + \frac{df'}{dy}(y-y_1) + \frac{df'}{dz}(z-z_1) = 0.$$

Der Punkt P tritt nun erstlich als singulärer auf, sobald die Durchschnittslinie von e und e' dadurch unbestimmt wird, dass die beiden Berührungs-Ebenen e und e' zusammenfallen, also für die Flächen in P ein Contact eintritt. Der analytische Ausdruck für diese Bedingung ist das Bestehen folgender zwei Gleichungen:

$$A)\ \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} = \frac{\frac{df'}{dx}}{\frac{df'}{dz}},\quad \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} = \frac{\frac{df'}{dy}}{\frac{df'}{dz}}.$$

Wird diesen Gleichungen von den Werthen der Coordinaten des Punktes P Genüge geleistet, so lässt sich zur Bestimmung der Geraden, welche die Curve in dem singulären Punkte P berühren, folgender Weg einschlagen.

Es seien z und z' bezüglich die Ordinaten von f und f', und aus den Gleichungen $f=0$ und $f'=0$ ergebe sich $z=z_{x,y}$, $z'=z'_{x,y}$. Für einen der Projection (x_1, y_1) von P zunächst gelegenen Punkt $(x_1+dx,\ y_1+dy)$ drückt sich alsdann die Differenz Δ der z-Ordinaten beider Flächen so aus:

$$\Delta = (z-z') + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dz'}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy} - \frac{dz'}{dy}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z'}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2!} + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy} - \frac{d^2z'}{dxdy}\right)\frac{dx\,dy}{2!}$$
$$+ \left(\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z'}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2!} + \cdots$$

Es reducirt sich dieser Ausdruck, da P beiden Flächen gemeinsam ist, und in Folge der Gleichungen A.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{dz'}{dy}$$

ist, auf:

$$\Delta=\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z'}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2!}+2.\left(\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{d^2z'}{dx\,dy}\right)\frac{dxdy}{2!}$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z'}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2!}+\ldots$$

Sollen nun x_1+dx und y_1+dy einem Punkte entsprechen, der auf f und f' befindlich und dem Punkte P nächst anliegend ist, so muss sein:

$$B')\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z'}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{d^2z'}{dxdy}\right)dx\,dy$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z'}{dy^2}\right)dy^2=0.$$

Hiernach gibt es zwei durch $\frac{dy}{dx}=m$ bestimmte Richtungen, nach welchen dem Punkte P ein Punkt der Durchschnitts-Curve nächst anliegt. Zwei nach eben diesen Richtungen durch P gelegte Gerade berühren die Curve. Diese Tangenten liegen in den zusammenfallenden Tangential-Ebenen e und e' und die Gleichung ihrer Projection auf die Ebene xy ist:

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Berühren sich also zwei Flächen des zweiten Grades in einem Punkte, so ist dieser ein Doppelpunkt der Durchschnitts Curve. Wenn die beiden aus B') sich ergebenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ reell sind, so ist der singuläre Punkt ein eigentlicher Doppelpunkt, d. i. der Durchschnitt zweier reeller Zweige, und wenn ausserdem die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich sind, so ist P eine Spitze oder es berühren sich in ihm zwei reelle oder imaginäre Curven-Aeste. Liefert aber andererseits die Gleichung B') für $\frac{dy}{dx}$ imaginäre Werthe, so tritt der singuläre Punkt als eigentlicher Einsiedler, d. i. als der Durchschnitt zweier imaginärer Curven-Zweige auf.

Um in der Gleichung B') die Functionen f und f' in Evidenz zu bringen, differentiire man die Gleichungen $f=0$, $f'=0$ der beiden Flächen zweimal nach x, zweimal nach y und einmal nach x und y. Man erhält alsdann, nachdem

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx'}, \frac{dz}{dy} \text{ und } \frac{dz'}{dy}$$

mit Hülfe der ersten partialen Differentialien jener Gleichungen eliminirt werden, sechs Gleichungen des ersten Grades zur Bestimmung von

$$\frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z'}{dx^2},\ \frac{d^2z'}{dy^2} \text{ und } \frac{d^2z'}{dxdy},$$

sodass alsdann an die Stelle dieser Ausdrücke in die Gleichung B') Ausdrücke in Differentialien von f und f' gesetzt werden können.

Lassen wir, was der Allgemeinheit der Betrachtungen keinen Abbruch thut, die z-Axe mit der gemeinsamen Normalen der beiden Flächen zusammenfallen, so nehmen die Gleichungen der letzteren diese Gestalt an:

$$f \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gz = 0,$$

$$f' \equiv a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'xy + e'xz + f'yz + g'z = 0.$$

Da, wie wir unterstellt haben, weder f noch f' in dem Doppel-Punkte P, dem jetzigen Anfangspunkte der Coordinaten, mit einer Singularität behaftet ist, so ist es gestattet für g und g' die Einheit zu setzen, und dadurch erhalten wir nach Ausführung der soeben erwähnten Substitution zur Bestimmung der Tangenten der Durchschnitts-Curve in P folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2f'}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{d^2f'}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2f}{dy^2} - \frac{d^2f'}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder:

$$B'')\ \frac{d^2(f-f')}{dx^2} + 2.\frac{d^2(f-f')}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2(f-f')}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Die Gleichung $f - f' = 0$ gehört, da sie nur Glieder der zweiten Dimension enthält, einer allgemeinen Kegelfläche des zweiten Grades an, auf deren Singularität (der Spitze oder der Kante) der Anfangs-Punkt der Coordinaten, oder der singuläre Punkt der Curve gelegen ist und die den Durchschnitt von f und f' aufnimmt. Die Richtungen der beiden Geraden, in denen diese Kegelfläche von der Ebene xy geschnitten wird, bestimmen sich durch eine mit B'') identische Gleichung, woraus wir schliessen, dass jene Geraden die Durchschnitts-Curve von f und f' berühren. Schneiden sich also zwei Flächen des zweiten Grades in einer Curve mit einem Doppelpunkte, der durch das Zusammenfallen der Tangential-Ebenen beider Flächen entstanden ist, so liegt die Durchschnitts-Curve auf einer Kegelfläche des zweiten Grades, deren Singularität durch den Doppelpunkt geht, und die gemeinschaftliche Berührungs-Ebene schneidet diesen Kegel in den Tangenten des singulären Punktes der Durschnitts-Curve. Eine Perspective, deren Mittelpunkt in der Singularität einer Curve der erwähnten Art liegt, liefert mithin als Ansicht der letzteren einen Kegelschnitt.

3. Wenn die Coefficienten einer der beiden Gleichungen $e=0$, $e'=0$ (S. Anfang der vorigen Nummer) z. B. der ersteren, verschwinden, so wird die entsprechende Ebene, also e, und alsdann auch der Durchschnitt von e und e' unbestimmt; die Durchschnitts-Curve weist in P eine Singularität auf, die sie dem Umstande verdankt, dass eine der Flächen, nämlich f, in demselben Punkte eine Singularität besitzt, oder, was dasselbe besagt, dass f eine Kegelfläche ist, deren Singularität durch P geht. Obgleich nun hiernach die hierher gehörigen Curven sich von den sub. 2. betrachteten in Nichts unterscheiden*), so wollen wir dennoch den Weg zeigen, auf dem sich hier die Natur der Singularität unmittelbar finden lässt. Es sei f die konische, f' die andere Fläche. Eine erste partiale Differentiation liefert:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0,$$

$$\frac{df'}{dx}+\frac{df'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx}=0,\quad \frac{df'}{dy}+\frac{df'}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dy}=0;$$

woraus sich für $\frac{dz'}{dx}$ und $\frac{dz'}{dy}$ bestimmte Werthe ergeben, während die von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftreten, (indem wir immer ein orthogonales Coordinaten-System unterstellen, dessen Anfangspunkt in den singulären Punkt P, und dessen z-Axe mit der Normalen von f' in P zusammenfällt.)

Sucht man nun den wahren Werth von $\frac{dz}{dx}$ z. B., so findet man:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dxdz}\left\{\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}}{\frac{d^2f}{dxdz}+\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2f}{dz^2}\left\{\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}}.$$

Ein ähnlicher Ausdruck ergibt sich für $\frac{dz}{dy}$. Wir setzen zur Abkürzung $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\equiv V$; alsdann wird:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{X+l.V}{Z+p.V},\quad \frac{dz}{dy}=\frac{Y+m.V}{Z+p.V}.$$

Die Ausdrücke X, Y, Z und V sind in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade, l, m, p vom nullten, d. i. constant. Durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen erhalten wir die neue:

*) Dies leuchtet auch daraus ein, dass $f+\lambda f'=0$ die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades ist, die ohne Kegelfläche zu sein, durch den Durchschnitt von f und f' geht, und die Fläche f' in P berührt: gerade der in 2. betrachtete Fall.

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\equiv V=\frac{\left(X+Y\frac{dy}{dx}\right)+V\left(l+m\frac{dy}{dx}\right)}{Z+pV},$$

woraus:

$$p\,.\,V^2+\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}V-X-Y\frac{dy}{dx}=0.$$

Bezeichnen wir dem Früheren analog $\frac{dz'}{dx}+\frac{dz'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ mit V', so muss für die durch $\frac{dy}{dx}$ bestimmte Richtung, nach welcher man von dem singulären Punkte P aus fortschreiten muss, um zu dem ihm nächst anliegenden Punkte der Durchschnitts-Curve zu gelangen, $V=V'$ sein. Zur Bestimmung der Tangenten der Curve erhalten wir sonach die Gleichung

$$pV'^2+V'\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}-X-Y\frac{dy}{dx}=0.$$

Diese Gleichung ist, wie zu erwarten war, in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ quadratisch; P ist folglich wiederum ein Doppelpunkt.

Lassen wir die Ebene xy die Fläche f' in P berühren und legen wir durch P die z-Axe, so verschwinden $\frac{dz'}{dx}$ und $\frac{dz'}{dy}$, und demzufolge auch V'. Unsere letzte Gleichung geht alsdann in die folgende über:

$$X+Y.\frac{dy}{dx}\equiv\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Diese Gleichung entspricht, wie leicht einzusehen, vollständig der Gleichung B'') in 2.; wie dort $f-f'$, so bezeichnet hier f die homogene Function des zweiten Grades mit drei Veränderlichen.

4. Wenn, was den dritten möglichen Fall ausmacht, die Coefficienten in $e=0$ und $e'=0$ sämmtlich verschwinden, so sind beide Flächen konisch, und ihre Singularitäten gehen durch den Punkt P. Dehnen wir hier das in der vorigen Nummer für f beobachtete Verfahren auch auf f' aus, so gelangen wir zur Bestimmung der Tangenten des singulären Punktes der Durchschnitts-Curve zu folgenden zwei Gleichungen:

$$pV^2+V\left\{Z-l-m\frac{dy}{dx}\right\}-X-Y.\frac{dy}{dx}=0,$$

$$pV'^2+V'\left\{Z'-l'-m'\frac{dy}{dx}\right\}-X'-Y'\frac{dy}{dx}=0.$$



Ausserdem hat man $V = V'$, so dass sich V und V' eliminiren lassen und dadurch eine Gleichung resultirt, die in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom vierten Gerade ist. Der singuläre Punkt ist hiernach ein vierfacher, und die Durchschnitts-Curve besteht aus vier Geraden, die sich in demselben Punkte begegnen, ein Resultat, welches leicht a priori hätte gewonnen werden können. Von jenen Geraden können je zwei zusammenfallen, sowie ein oder beide Paare imaginär werden.

5. In dem Vorhergehenden haben wir dargethan, dass es für die Durchschnitts-Curven zweier Flächen des zweiten Grades mit einem mehrfachen Punkte immer eine konische Projection des zweiten Grades gebe, oder, was dasselbe besagt, dass sich jene Curven als Kegelschnitte konisch projiciren lassen. Die Singularität des projicirenden Kegels geht durch den singulären Punkt. Sehen wir uns andererseits nach einer einfachen cylindrischen Projectionsart um, so bietet sich uns am ehesten diejenige dar, deren Axe in dem allgemeinen Falle mit der Normale der Curve im singulären Punkte zusammenfällt, und deren Projections-Ebene die beiden Tangenten des singulären Punktes enthält. Ausser dem letzteren liegt alsdann kein Punkt der Curve in jener Ebene. Nehmen wir wiederum diese zur Ebene xy, die Normale zur z-Axe, so ist die allgemeinste Form der Gleichungen beider sich schneidenden Flächen die folgende:

$$F \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gz$$
$$\equiv (ax^2 + by^2 + dxy) + cz^2 + (ex + fy + g)z \equiv f_2 + cz^2 + fz = 0$$

und

$$F' \equiv (a'x^2 + b'y^2 + d'xy) + c'z^2 + (e'x + f'y + g')z \equiv f_2' + c'z^2 + f'z = 0.$$

In dem allgemeinsten Falle, wo weder F noch F' dadurch, dass g oder g' verschwindet, sich auf eine Kegelfläche zurückzieht, erhält man durch Verbindung der beiden Gleichungen für die Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene xy folgende neue:

$$\Phi \equiv (f_2 c' - f_2' c) + (fc' - f'c)z \equiv \varphi_2 + \varphi z = 0$$

und

$$K \equiv (f_2 g' - f_2' g) + (cg' - c'g)z^2 + (fg' - f'g)z \equiv k_2 + \alpha z^2 + kz = 0.$$

Wir können nun die fragliche Curve als den Durchschnitt der beiden Flächen Φ und K betrachten. An die Stelle von Φ tritt, wenn c oder c' verschwindet, bezüglich F oder F', und wenn beide Constanten verschwinden, irgend eine dieser Flächen.

Wenn im Besonderen g oder g', z. B. das letztere, der Null gleich wird, so führen wir die Fläche K nicht ein, sondern be-

trachten die Curve als Durchschnitt der Flächen Φ und F'. Verschwindet aber ausser g' auch noch c', so führen wir gar keine neue Fläche ein.

Verschwinden endlich g und g' zumal, so führen wir nur in dem Falle die Fläche Φ ein, wenn weder c noch c' verschwindet, und betrachten dann die Curve als den Durchschnitt von Φ und einer der beiden Flächen F und F'.

Wenn wir auf die angegebene Weise verfahren, so können wir die fraglichen Curven hinstellen als den Durchschnitt zweier Flächen Φ und K, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$\text{I.}\quad \Phi\equiv\varphi_2+\varphi z=0,\qquad \text{II.}\quad K\equiv k_2+\alpha z^2+kz=0,$$

wo φ_2 und k_2 homogene Functionen des zweiten Grades, k und φ aber allgemeine Functionen des ersten Grades bedeuten. Als allgemeinster Fall ist alsdann derjenige zu betrachten, wo k homogen ist, während derjenige ausser Acht gelassen werden kann, wo k sowohl als auch φ Constanten enthalten. Als besonderer Fall scheidet sich hiernach derjenige endlich noch ab, in welchem k keine Constante enthält, φ aber homogen ist.

6. Indem wir zunächst den allgemeinen Fall unserer Betrachtung unterziehen, nehmen wir an, dass k homogen sei. Wir zerlegen φ_2 in die Factoren p und q vom ersten Grade, sowie k_2 in die Factoren r und s, und setzen, um eine homogene Bezeichnung zu erhalten, $\varphi\equiv t$ und $k\equiv u$; die Gleichungen I. und II. schreiben sich alsdann wie folgt:

$$\text{I.}\quad \Phi\equiv pq+tz=0,\qquad \text{II.}\quad K\equiv rs+\alpha z^2+uz=0.$$

Die Gleichung I. stellt eine nicht geschlossene Fläche des zweiten Grades dar, welche von der Ebene xy im Anfangspunkte der Coordinaten berührt, und gleichzeitig in den beiden Geraden $p=0$, $q=0$ geschnitten wird. Die z-Axe ist eine Asymptoten-Richtung dieser Fläche, da diese von jeder mit jener Axe parallelen Geraden nur in einem einzigen in endlicher Entfernung gelegenen Punkte geschnitten wird. Es wird diese Fläche von zwei durch die z-Axe und die Geraden p und q gelegten Ebenen in zwei mit der z-Axe parallelen Geraden geschnitten, die in der Ebene $t=0$ liegen. Die Gleichung II. gehört einer Kegelfläche an, deren Singularität durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und die von der Ebene xy in der Geraden r und s geschnitten wird. Zwei Ebenen, welche die z-Axe und die Geraden r und s aufnehmen, schneiden jene Kegelfläche in einem Paar anderer Geraden r' und s', die in einer Ebene liegen, deren Gleichung $\alpha z+u=0$ ist. Diese schneidet die Ebene xy in der Geraden u. Die Natur der Fläche Φ liefert uns die Unterscheidung von drei Fällen: es können nämlich p und q beide reell und ungleich oder reell und gleich oder endlich beide imaginär sein. Wir wollen diese Fälle einzeln untersuchen. Es seien nun erstlich p und q reell und ungleich. Die Fläche Φ gehört alsdann im Allgemeinen einem hyperbolischen Hyperboloide an und geht im Besonderen in ein hyperbolisches Paraboloid oder in einen Kegel über. Das Product rs lässt sich immer auf die Form $\beta p^2+\gamma q^2+\delta pq$ bringen, so dass sich also für die Gleichung der

Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene xy die folgende ergibt:

$$C. \quad \alpha p^2q^2+\beta p^2t^2+\gamma q^2t^2+pqt(\delta t-u)=0,$$

wo:

$$u\equiv\varkappa q+\pi p \quad \text{und} \quad t\equiv\varkappa' q+\pi' p+\eta',$$

so dass sich für $C.$ auch schreiben lässt:

$$\alpha p^2q^2+\beta p^2t^2+\gamma q^2t^2+pqt(\delta t-\varkappa q-\pi p)=0.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Form derjenigen einer Curve des vierten Grades mit drei Doppelpunkten. Diese liegen in den Durchschnitten der drei Geraden p, q und t; denn für $t=0$ z. B. wird die Gleichung durch $p^2=0$ und $q^2=0$ befriedigt, so dass also t in seinem Durchschnitte mit p und mit q je zwei Punkte mit der Curve gemein hat, ohne sie jedoch zu berühren, da auch p und q in denselben Punkten die Curve zweimal schneiden. Es verrücken diese Doppelpunkte der Projection ihre Lage nicht, so lange Φ dieselbe Fläche bleibt und wie auch die Kegelfläche K der Gestalt und Lage nach sich ändern möge. — Wir wollen sehen, wie die Lage der Doppelpunkte von der Natur der Fläche Φ und ihrer Lage abhängig sind. Wenn t die allgemeine Function des ersten Grades darstellt und sowohl p als auch q enthält, so ist Φ ein hyperbolisches Hyperboloid. Alsdann besitzt die Projection ausser dem Punkte (p, q) noch zwei in endlicher Entfernung gelegene Doppelpunkte. Verschwindet in t der Coefficient einer der beiden Variabeln, so dass also die Gerade t einer der Geraden p und q parallel läuft, so geht Φ in ein hyperbolisches Paraboloid über, und die Curve behält ausser dem Punkt (p, q) nur mehr einen in endlicher Entfernung gelegenen Doppelpunkt. Dadurch dass der dritte Doppelpunkt, welcher (p, t) sei, in das Unendliche rückt, erlangt die Curve zwei Asymptoten, die den Geraden p und t parallel sind. — Die Axe des eben erwähnten Paraboloides fällt mit der Normalen des singulären Punktes P zusammen, sobald sich t auf eine Constante zurückzieht. In Folge dessen rücken die Doppelpunkte (p, t) und (q, t) unendlich weit weg, und die Projection behält nur den einzigen Doppelpunkt (p, q), während gleichzeitig ihre Gleichung in die folgende übergeht:

$$pq\{\alpha' pq-\varkappa' q-\pi' p\}+\beta' p^2+\gamma' q^2+\delta' pq=0.$$

Wir ersehen aus ihrer Form, dass die beiden Geraden p und q und ein zweites Paar ihnen paralleler Linien $p-\frac{\varkappa'}{\alpha'}$, $q-\frac{\pi'}{\alpha'}$ als Asymptoten der Projection auftreten. Die Grund-Curve der letzteren besteht aus zwei durch den singulären Punkt gehenden Geraden. — Wenn endlich t in die homogene Function des ersten Grades übergeht, so artet Φ in eine Kegelfläche aus. In der Gleichung der Projection erscheinen dann nur Glieder von vier Dimensionen, sie gehört also vier geraden Linien an, die sich im Anfangspunkte der Coordinaten begegnen.

Die Gleichung $C.$ hört auf einer eigentlichen Curve des vierten Grades anzugehören, wenn k in zwei sich schneidende Ebenen übergeht. In diesem Falle nämlich lässt sich die linke Seite der Gleichung II. in zwei Factoren des ersten Grades und folglich auch die der Gleichung $C.$ in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegen, so dass diese letztere Gleichung zwei Kegelschnitte (reelle oder imaginäre) darstellt, die den Punkt P gemein haben. — Eine besondere Lage der Kegelfläche K bedingt eine Reduction des Grades der Gleichung $C.$ Fällt nämlich die Normale in P mit einer Seite des Kegels zusammen, so verschwindet in der Gleichung II. der Coefficient α, und anstatt der Gleichung $C.$ erhalten wir die folgende:

$$D. \quad \beta p^2 t + \gamma q^2 t + pq\{\delta t - \varkappa q - \pi p\} = 0,$$

und diese stellt eine Curve des dritten Grades dar, für die der Punkt (p, q) ein Doppelpunkt ist. Geht die Kegelfläche in dieser ihrer Lage in zwei Ebenen über, so zerfällt die Curve des dritten Grades in einen Kegelschnitt und eine Gerade, die mit jenem den Punkt (p, q) gemein hat. Wir überheben uns der weiteren Specification der möglichen Fälle, um zur Betrachtung der Natur der Doppelpunkte überzugehen. Die Tangenten des Doppelpunktes (p, q) werden repräsentirt durch Gleichungen von der Form:

$$p + \lambda_1 q = 0, \quad p + \lambda_2 q = 0$$

und die Werthe von λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$1) \qquad \beta\lambda^2 - \delta\lambda + \gamma = 0.$$

Aus den Coefficienten dieser Gleichung ersehen wir, dass die Tangenten mit den beiden Geraden r und s, in welchen der Kegel K von der Ebene xy geschnitten wird, zusammenfallen. Jenachdem $\delta^2 - 4\beta\gamma$ positiv oder negativ oder der Null gleich wird, d. h. jenachdem K von der Ebene xy in zwei reellen sich schneidenden oder zusammenfallenden Geraden oder nur in einem Punkte, dem Durchschnitte zweier imaginärer Kegelseiten, geschnitten wird, ist P ein eigentlicher Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolirter Punkt. An die Stelle der Spitze tritt in dem Falle, wo der Kegel in zwei Ebenen ausartet, der Berührungspunkt zweier reeller oder imaginärer Curvenzweige.

Die Tangenten der beiden auf t gelegenen Doppelpunkte haben Gleichungen von der Form:

$$p + \mu_1 t = 0, \quad p + \mu_2 t = 0; \quad q + \nu_1 t = 0, \quad q + \nu_2 t = 0.$$

Die Werthe von μ_1, μ_2 etc. bestimmen sich durch die quadratischen Gleichungen:

$$2) \quad \alpha\mu^2 - \varkappa\mu + \gamma = 0, \qquad 3) \quad \alpha\nu^2 - \pi\nu + \beta = 0.$$

Um die Abhängigkeit der Natur dieser Doppelpunkte von den Flächen Φ und K kennen zu lernen, bringen wir den Ausdruck K auf die Form

$$(\alpha z^2 + \varkappa qz + \gamma q^2) + p(\beta p + \delta q + \pi z),$$

so dass in Folge der Gleichung 2) die Gleichung der Kegelfläche übergeht in:

$$(z + \mu_1 q)(z + \mu_2 q) + p(\beta p + \delta q + \pi z) = 0.$$

$z + \mu_1 q = 0$, $z + \mu_2 q = 0$ sind hiernach die Projectionen der beiden Geraden, in welchen K von der Ebene $p = 0$ geschnitten wird, auf eine durch z und q gelegte Ebene. Wir folgern hieraus, dass der Punkt (p, t) ein eigentlicher Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolirter Punkt ist, jenachdem eine durch die Normale in P und die Gerade p gelegte Ebene mit der Kegelfläche K zwei reelle sich schneidende oder zusammenfallende oder zwei imaginäre Gerade gemein hat. Ganz Gleichlaufendes gilt für den Punkt (q, t). Von Wichtigkeit ist hier folgende Bemerkung. Für einen jeden Punkt der Projection mit Ausnahme der zuletzt betrachteten Doppelpunkte liefert die Gleichung I. einen bestimmten Werth von z, so dass es nur für diese Punkte unentschieden bleibt, ob ihnen ein reeller Punkt der Durchschnitts-Curve entspreche. Es rührt dies von dem Umstande her, dass die Gleichung, welche durch Substitution des aus I. gewonnenen Werthes von z in die Gleichung II. erhalten wird, zur Herstellung der Gleichung $C.$ mit dem Factor t multiplicirt wurde. Wenn nun aber der Kegel K von der Ebene $p = 0$ in zwei reellen Geraden geschnitten wird, so trifft die Gerade $(p = 0,\ t = 0)$ die Kegelfläche in zwei Punkten, deren gemeinsame Projection in den Doppelpunkt (p, t) fällt. Sind aber die Geraden, die jenen beiden Oertern gemein sind, imaginär, so sind es im Allgemeinen auch die Durchschnitte der Geraden $(p = 0,\ t = 0)$ und des Kegels K, während jedoch ihre reellen Projectionen in den Punkt (p, t) fallen. Nur, wenn im Besonderen der Kegel in zwei imaginäre Ebenen zerfällt, und deren reelle Durchschnittslinie die Gerade $(p = 0,\ t = 0)$ trifft, entspricht dem isolirten Punkte (p, t) ein reeller Punkt der Durchschnitts-Curve, der ebenfalls ein Einsiedler ist. Besteht also die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem Doppelpunkte nicht aus zwei ebenen Curven, so entspricht einem isolirten Punkte ihrer Projection auf die Tangential-Ebene des Doppelpunktes kein reeller Punkt der Curve. — Das Factum, dass für die den Doppelpunkten entsprechenden Punkte der Curve $\frac{z}{q} = \frac{p}{t}$ und $\frac{z}{p} = \frac{q}{t}$ ist, bietet ein leichtes Mittel dar die Tangenten jener Punkte zu construiren. — Wir bemerken noch, dass, so oft die Fläche Φ ein hyperbolisches Paraboloid ist, die Function t dadurch, dass man die z-Axe mit der Axe des Paraboloides zusammenfallen lässt, auf eine Constante reducirt wird. Projicirt man also nach der Richtung jener Axe, so verliert die Curve $C.$ zwei ihrer Doppelpunkte, und es bleibt nur mehr der Punkt (p, q) als solcher zurück.

7. Wenn, was den zweiten der zu Anfang der vorigen Nummer aufgezählten Fälle ausmacht, die Linie q mit der Linie p zusammenfällt, so stellt die Gleichung I. im Allgemeinen einen Kegel dar, dessen Singularität durch den Punkt (p, t) geht, und der von der Ebene $t=0$ und der Ebene xy in zwei zusammenfallenden Geraden, und zwar von der ersteren in solchen, die der z-Axe parallel sind, von der zweiten in den zusammenfallenden Geraden p und q geschnitten wird. Die Gleichungen der Flächen Φ und K lassen sich durch gehörige Wahl der in der Ebene xy durch P gehenden Geraden o umformen in:

$$\Phi \equiv p^2 + tz = 0, \quad K \equiv (\beta p^2 + \gamma o^2) + \alpha z^2 + uz = 0,$$

woraus sich für die Projection der Durchschnitts-Curve folgende Gleichung ergibt:

$$C'. \qquad \alpha p^4 + \beta p^2 t^2 + \gamma o^2 t^2 - p^2 ut = 0.$$

In dem allgemeinen Falle, d. i. wenn t sowohl als auch p und o eine Constante aufweist, und sonach Φ einen Kegel darstellt, gehört die Gleichung C'. einer Curve des vierten Grades mit zwei Singularitäten an, von denen die eine in dem Doppelpunkte (p,o), die andere darin besteht, dass sich zwei Curvenzweige in dem Punkte $(p=0,\ t=0)$ berühren; von den drei im allgemeinsten Falle zum Vorschein kommenden drei Doppelpunkten fallen die beiden auf t befindlichen zusammen. Die Tangenten des ersteren Punktes fallen wiederum mit den Durchschnitten des Kegels K und der Ebene xy zusammen, wie in den Fällen der vorhergehenden Nummer; die gemeinsame Tangente der sich tangirenden Curvenzweige ist die Gerade t. — Geht die letztere Gerade durch den Punkt P, so treffen sich die Singularitäten der beiden Kegelflächen, da sich denn auch die linke Seite der Gleichung C'. in vier Factoren des ersten Grades zerlegen lässt und die Projection wie die Durchschnitts-Curve selbst in vier gerade Linien übergeht. — Die Fläche Φ geht in einen hyperbolischen Cylinder über, wenn die Gerade t der Geraden p parallel wird. Die Axe dieses Cylinders läuft mit t und p parallel, und die Gleichungen seiner asymptotischen Ebenen sind, wenn $t \equiv \pi p + \eta$ ist,

$$t \equiv \pi p + \eta = 0 \text{ und } \pi p + \pi^2 z - \eta = 0.$$

Dadurch, dass der Berührungspunkt (p, t) zweier Aeste auf t unendlich weit rückt, fallen in diese Linie zwei Asymptoten der Curve, oder, was dasselbe besagt, es wird t eine vierpunktig osculirende Asymptote der Curve. — Die Fläche Φ kann endlich in einen parabolischen Cylinder ausarten, was eintritt, sobald sich t auf eine Constante zurückzieht. Die Gleichung C'. bringen wir dann auf die Form

$$p^2 . rs + (\beta p^2 + \gamma o^2)\mu = 0,$$

und ersehen aus ihr, dass zwei der Asymptoten der Curve mit p zusammenfallen, während die beiden andern den singulären Punkt durchsetzen. Die Grund-Curve besteht in dem Durchschnite der

Ebene xy und des Kegels K. — Was den unmittelbaren Einfluss des Kegels K auf die Gestalt der Projection betrifft, so tritt, wenn α verschwindet, an die Stelle der Gleichung C'. die folgende:

$$D'. \qquad \beta p^2 t + \gamma o^2 t - p^2 u = 0.$$

Sie gehört einer Curve des dritten Grades an, die in ($p=0$, $o=0$) einen Doppelpunkt besitzt, und von der Geraden t in deren Durchschnitt mit p berührt wird. — Geht der Kegel K in zwei Ebenen über, so besteht die Projection aus zwei Kegelschnitten, die sich im Allgemeinen im Punkte P schneiden, während sie in dem Punkte (p, t) von der Geraden t gleichzeitig berührt werden. — Für eine speciellere Unterscheidung der hier möglichen Fälle ist in den obigen Bemerkungen eine Ueberblick gewährende Grundlage gegeben.

8. Die Betrachtungen und Entwicklungen der sechsten Nummer übertragen sich leicht auf die dritte Art der Curven, welche den Vorwurf dieser Abhandlung ausmachen, auf diejenigen nämlich, welche sich durch den Umstand, dass die beiden Geraden p und q, die in der Gleichung I. in Evidenz treten, imaginär werden, zusammenreihen. Die Fläche Φ ist alsdann im Allgemeinen ein elliptisches Hyperboloid. Dasselbe wird von der Ebene xy im Punkte P berührt, und mit einer Seite seines Asymptoten-Kegels lauft die z-Axe parallel. Die Gleichung der Projection lässt sich wiederum auf die Form C. bringen, und wir ersehen aus ihr, dass von den drei Doppelpunkten, welche jener im Allgemeinen zukommen, hier nur einer, nämlich P, reell wird, während die beiden anderen, als die Durchschnitte der reellen Geraden t und der imaginären Geraden p und q imaginär werden. Die Natur des ersten Punktes wird auf dieselbe Weise wie in 6. erkannt. Die Fläche Φ kann nun erstlich in einen Kegel ausarten — ein leicht zu discutirender Fall — ferner auch in ein elliptisches Paraboloid, wenn nämlich t keine der Variabeln enthält. Wenn letzteres eintritt, so rücken die beiden imaginären Doppelpunkte ins Unendliche. Sämmtliche Asymptoten der Curve werden imaginär, und zwar bestimmt sich der eine Asymptoten-Punkt durch die Gleichungen

$$p=0, \quad q=0$$

und der zweite durch solche von der Form

$$p+(m+ni)=0, \quad q+(m-ni)=0.$$

Da die Modificationen der Projection, welche eine Folge der Veränderung des Kegels K in Gestalt und Lage sind, leicht übersehen werden können, und überdies in den Betrachtungen der sechsten Nummer ihr Analogon finden, so überheben wir uns ihrer Angabe.

9. Es erübrigt nun noch den in 5. bezeichneten Ausnahmefall zu betrachten, dessen Charakter darin besteht, dass φ eine

homogene, k eine nicht homogene Function des ersten Grades darstellt. Auch hier nimmt die Gleichung der Projection die Form $C.$ an, unter der Voraussetzung jedoch, dass jetzt t homogen, u aber als mit einer Constanten versehen gedacht werde. Die Gleichung $C.$ stellt dann ersichtlich eine Curve des vierten Grades dar, die in P einen dreifachen Punkt besitzt; alle drei Doppelpunkte des allgemeinen Falles sind in einen einzigen Punkt zusammengerückt. Die Curve wird in ihrem dreifachen Punkte von den Geraden p, q und t berührt. Was die Bedeutung der Gleichungen I. und II. betrifft, so stellt Φ einen Kegel dar, dessen eine Apotheme mit der Normalen in P, mit der z-Axe, coincidirt. Die Gleichung II. aber kann irgend einer Fläche des zweiten Grades, die Kegelfläche ausgeschlossen, angehören. Wir bemerken schliesslich noch, dass, wofern man die im Obigen immer beibehaltene ausgezeichnete Projections-Ebene aufgeben will, die Durchschnitts-Curve zweier Flächen des zweiten Grades mit einem Doppelpunkte im Allgemeinen immer so projicirt werden kann, dass die Projection einen dreifachen Punkt erhält; man braucht zu dem Ende nur als Projections-Ebene eine solche anzunehmen, die durch den Doppelpunkt geht und auf einer Seite des die Durchschnitts-Curve aufnehmenden Kegels senkrecht steht, oder allgemeiner noch: man braucht nur als Projections-Richtung die einer Geraden zu wählen, welche den Doppelpunkt mit irgend einem anderen Punkte der Durchschnitts-Curve verbindet.

X.

Einige Sätze aus der Zahlenlehre.

(Frei nach den Annales de Mathématiques von Terquem. Septembre 1849.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

Wie viel Ziffern sind in der Reihe der Zahlen von 1 bis $10^{n+1}-1$?

Von 10^n bis $10^{n+1}-1$ sind offenbar $10^{n+1}-10^n=9.10^n$ mal $n+1$ Ziffern, also im Ganzen

$$9(n+1).10^n=9n.10^n+9.10^n.$$

Die verlangte Summe ist also

$$\sum_0^n(9n.10^n+9.10^n),$$

wo $\sum\limits_0^n$ bedeutet, dass man n alle Werthe von 0 bis n beilegen soll.

Nach den in Theil VII. Abhandlung XLVII. niedergelegten Grundsätzen erhält man:

$$\sum_0^r(n+1)x^n=\frac{1-x^{r+1}-(r+1)(1-x)x^{r+1}}{(1-x)^2},$$

also für $r=n$, $10=x$:

$$9.\sum_0^n(n+1)x^n=\frac{1-10^{n+1}+(n+1).9.10^{n+1}}{9}$$

$$=(n+1).10^{n+1}-\frac{10^{n+1}-1}{9},$$

welches die verlangte Anzahl ist.

§. 2.

Man soll die Anzahl der Ziffern finden, die in der Reihe der Zahlen von 1 bis N enthalten sind.

Sei $N \geqq 10^{n+1}$ und $< 10^{n+2}$, also $= 10^{n+1} + k$. Von 1 bis $10^{n+1} - 1$ sind (§.1.) $(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$ Ziffern; nun sind noch $k+1$ Zahlen von $10^{n+1}-1$ bis N, jede von $n+2$ Ziffern; demnach hat man im Ganzen

$$(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9} + (k+1)(n+2)$$

Ziffern. Es versteht sich von selbst, dass k auch Null sein darf.

§. 3.

Man schreibe alle Zahlen, von 1 an, in eine Linie von rechts nach links, eine nach der andern; welche Ziffer ist an einer gewissen Stelle, von rechts her gerechnet?

Man verlange z. B. die Ziffer, welche die 1849ste Stelle einnimmt. Diese Ziffer gehört zu einer gewissen Zahl, die man zuerst aufzusuchen hat, und die so beschaffen ist, dass die Anzahl der Ziffern aller Zahlen vor ihr, die von ihr zugehörigen mitgerechnet, 1849 beträgt. Sehen wir zuerst, ob sie unter den Zahlen $10^{n+1}-1$ enthalten ist. Die Summe

$$(n+1).10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9} \text{ giebt für } n=1:\ 189,$$

$$n=2:2889.$$

Die Zahl liegt also zwischen 99 und 999; in der Summe (§. 2.) muss also $n=1$ sein, und k so, dass

$$2.10^2 - \frac{10^2-1}{9} + (k+1).3 = 1849,$$

d. h.
$$(k+1)3. = 1660,\ k = \frac{1657}{3} = 552\tfrac{1}{3};$$

demnach ist in §. 2. $N = 10^2 + 552 = 652$. Allein $N = 652$, also $k = 552$ und $n = 1$ entsprechen

$$2.10^2 - \frac{10^2-1}{9} + (553)\,3 = 1848$$

Ziffern; die 1849ste ist also die erste Ziffer rechts der folgenden Zahl, d. h. der Zahl 653; die 1849ste Ziffer ist also 3. (In den Nouvelles Annales ist hierin eine Unbestimmtheit.)

§. 4.

Man betrachte die Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

und deren Glieder man findet, wenn man hier $n=1, 2, 3,\ldots$ setzt, wodurch man erhält:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\ldots (1)$$

Nach den in Theil VII. S. 434. entwickelten Grundsätzen findet man, dass diess die Reihe ist, die man aus

$$\frac{1+x}{1-x-x^2}$$

erhält, wenn man darin $x=1$ setzt. Zugleich folgt hieraus, dass drei auf einander folgende Glieder dieser Reihe durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \ldots\ldots (2)$$

Die nächste Frage sei nun die, wie viel von den Zahlen der Reihe (1) die nämliche Anzahl Ziffern habe?

Wir wollen die Reihe abtheilen in Gruppen, so dass die Zahlen der ersten Gruppe mit 1, die der zweiten mit 2, der dritten mit 3 u. s. f. Ziffern geschrieben werden. Betrachten wir nun die $(m+1)$te Gruppe und nehmen von ihr an, ihre zwei ersten Glieder seien 10^m+A_1, 2.10^m+A_2, wo A_1 und A_2 beide kleiner sind als 10^m, d. h. nehmen wir an, die erste Zahl enthalte als erste Ziffer links 1, die zweite als solche Ziffer 2, so würden nach obigem Gesetze (2) die fünf folgenden Zahlen sein:

$$3.10^m+A_1+A_2,\ 5.10^m+A_1+2A_2,\ 8.10^m+2.A_1+3A_2,$$
$$13.10^m+3A_1+5A_2,\ 21.10^m+5A_1+8A_2;$$

wenn

$$A_1+A_2<10^m,$$

oder

$$4.10^m+B_1,\ 6.10^m+B_1+A_2,\ 10^{m+1}+2B_1+A_2,\ 16.10^m+3B_1+2A_2.$$

wenn $A_1+A_2\overset{=}{>}10^m$, wo dann $B_1<10^m$. Daraus folgt, dass diese Gruppe höchstens fünf, mindestens aber vier Glieder habe. Fünf Glieder wird diese Gruppe haben, wenn $A_1+A_2<10^m$ und $2A_1+3A_2<2.10^m$, in welchem Falle das erste Glied der folgenden Gruppe mit 1, das zweite mit 2 anfängt. Wäre aber zugleich $2A_1+3A_2\overset{=}{>}2.10^m$, so hätte die Gruppe bloss vier Glieder, das erste Glied der folgenden Gruppe finge jedenfalls mit 1, und das nächste gleichfalls mit 1 an. Man hätte nämlich, wenn

$$2A_1+3A_2<2.10^m,\ \text{auch}\ \begin{array}{l|l} 3A_1+4A_2<3.10^m & 5A_1+7A_2<5.10^m \\ 3A_1+5A_2<4.10^m & 5A_1+8A_2<6.10^m \end{array}$$

$$2A_1+3A_2\begin{array}{l}\overset{=}{>}2.10\\ <3.10,\end{array}\ \text{auch}\ \begin{array}{l|l} 3A_1+4A_2<4.10^m & 5A_1+7A_2<7.10^m \\ 3A_1+5A_2<5.10^m & 5A_1+8A_2<8.10^m; \end{array}$$

ist aber $A_1+A_2\overset{=}{>}10^m$, so ist $B_1<10^m$ und die Gruppe hat bloss

vier Glieder. Das erste Glied der folgenden Gruppe fängt, da $2B_1+A_2<10^{m+1}$, mit 1, das zweite kann mit 1 oder 2 anfangen.

Ist $\quad 2A_1+3A_2<2.10^m$, also $3A_1+5A_2<4.10^m$,

so ist

$$13.10^m+3A_1+5A_2=10^{m+1}+C_1,\quad C_1=3.10^m+3A_1+5A_2,\quad C_1<10^{m+1}$$

$$21.10^m+5A_1+8A_2=2.10^{m+1}+C_2,\quad C_2=10^m+5A_1+8A_2,\quad C_2<10^{m+1};$$

ist

$$2A_1+3A_2 \geqq 2.10^m, \text{ so ist } 8.10^m+2A_1+3A_2=10^{m+1}+D_1,\ D_1<10^{m+1}$$
$$13.10^m+3A_1+5A_2<2.10^{m+1};$$

ist

$$A_1+A_2 \geqq 10^m, \text{ so ist } 2B_1+A_2<10^{m+1},$$
$$3B_1+2A_2<5.10^m.$$

Aus Allem folgt, dass wenn die zwei ersten Glieder einer Gruppe durch

$$10^m+A_1,\ 2.10^m+A_2,\ A_1<10^m,\ A_2<10^m,$$

dargestellt werden können, diese Gruppe entweder vier oder fünf Glieder hat, und dass die zwei ersten der folgenden Gruppe durch

$$10^{m+1}+B_1,\ 2.10^{m+1}+B_2, B_1<10^{m+1},\ B_2<10^{m+1}$$

dargestellt werden, wobei sogar B_2 negativ sein kann. Wäre oben A_2 negativ gewesen, so hätten offenbar alle Schlüsse um so mehr Statt. In diesem Falle hätte die Gruppe sogar fünf Glieder. Da nun die erste Gruppe ($m=0$), 1, 2, 3, 5, 8 ist, also ihre zwei ersten Glieder der Bedingung

$$10^m+A_1,\ 2.10^m+A_2,\ A_1<10^m,\ A_2<10^m$$

genügen, so genügen in allen Gruppen die zwei ersten Glieder dieser Bedingung, wobei bemerkt werden muss, dass oft A_2 negativ sein kann, d. h. das zweite Glied auch noch mit 1 anfangen kann; eine solche Gruppe hat dann nothwendig fünf Glieder, während jede andere mindestens vier, höchstens fünf hat. (Der Beweis in den Annales ist ganz ungenügend.)

§. 5.

Eine weitere Frage in Bezug auf die Reihe (1) wäre die, wenn ein Glied der Reihe gegeben wäre, zu finden, das wievielte es sei?

Offenbar kann man diese Aufgabe vermittelst der Form des allgemeinen Gliedes lösen. Allein man kann auch anders verfahren. Es habe die gegebene Zahl p Ziffern, so gehört sie in die $p$te Gruppe (§. 4.). Hätte jede Gruppe fünf Glieder, so wäre das gegebene Glied eines derer vom $(5p-4)$ten bis zum $5p$ten; hätte jede Gruppe bloss vier, so wäre das gegebene Glied eines derer vom $(4p-3)$ten bis zum $5p$ten. Da es aber, wie man sich leicht überzeugen wird, mindestens drei Gruppen von fünf Gliedern giebt, so sieht man leicht, dass das gegebene Glied mindestens das $4p$te, höchstens das $5p$te ist. Setzt man also in

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

für n alle ganzen Zahlen von $4p$ bis $5p$, so wird einmal der Werth des gegebenen Gliedes herauskommen und man wird also n finden.

§. 6.

Da

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

und auch

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

so folgt hieraus, dass zwei auf einander folgende Glieder keinen Faktor gemeinschaftlich haben können, der grösser als 1 ist, da, wie man aus vorstehenden Gleichungen ersehen kann, sonst sämmtliche Glieder diesen Faktor hätten. Da aber die drei ersten 1, 2, 3 keinen solchen Faktor haben, so ist diess unmöglich. (Die Annales behaupten, alle Glieder seien zu einander theilerfremd, was falsch ist.)

Macht man die gleiche Rechnung, als wenn man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern suchen wollte, so werden die nach einander zum Vorschein kommenden Reste offenbar alle den zwei vorangegangenen Glieder sein, d. h. die Anzahl der nöthigen Divisionen, bis der Rest 0 erscheint, wird angegeben durch den Rang des geringeren Gliedes. Nimmt man also z. B. das 19te und 20ste Glied, so sind 19 Divisionen nöthig.

§. 7.

Sind zwei Zahlen zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern der Reihe enthalten, so kann keine das Doppelte, oder mehr als das Doppelte der anderen sein. Denn a_{n+2} selbst ist $< 2a_{n+1}$. Eben so ist der Unterschied jener zwei Zahlen kleiner, als das Glied der Reihe, das den genannten zwei vorangeht. Denn sind die zwei Zahlen zwischen a_{n+1} und a_{n+2} enthalten, so ist ihr Unterschied kleiner als $a_{n+2} - a_{n+1}$, d. h. kleiner als a_n.

§. 8.

Sucht man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen, so hat man nicht mehr Divisionen zu machen, als durch die fünffache Zifferanzahl der kleineren Zahl angegeben ist, bis man den Rest 0 erhält.

Sei P die kleinere Zahl, R der erste Rest, und sei P zwischen a_n und a_{n+1}; wenn $\frac{P}{R} \overset{=}{>} 2$, so ist $R < a_n$ (§. 7.); ist $\frac{P}{R} < 2$, so kann R zwischen a_n und a_{n+1} sein (§. 7.); aber alsdann ist der folgende Rest $P-R < a_{n-1}$ (§. 7.); daraus folgt, dass man nicht mehr male zu dividiren habe, als wenn es sich um die Zahlen a_n und a_{n+1} handelt, d. h. nicht mehr als n mal (§. 6.). Hat a_n nun p Ziffern, so ist n nicht grösser als $5p$ (§. 5.), also hat man nicht mehr als $5p$ mal zu dividiren. Da die Zahl der Ziffern von P nicht kleiner als p ist, so ist damit der Satz bewiesen.

XI.

Ueber den Zusammenhang einiger das Tetraëder betreffenden Aufgaben.

Von dem

Herrn Doctor R. Baltzer,

Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Die Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel, welche von vier beliebigen Richtungen im Raume gebildet werden, ist bekannt und rührt, wie es scheint, von Sturm her, welcher im XV. Bande S. 330 ff. von Gergonne's Annalen dieselbe durch die Methode der rechtwinkligen Projectionen entwickelt. Bezeichnet man die vier Richtungen mit x, y, z, r, und den Winkel, um welchen die Richtung x in bestimmtem Sinne gedreht werden muss, bis sie mit der Richtung y (nicht mit der entgegengesetzten) zusammenfällt, mit xy u. s. w., so ist

$$\begin{aligned}
&\sin^2 yz \cos^2 xr + \sin^2 zx \cos^2 yr + \sin^2 xy \cos^2 zr \\
&-2(\cos xy - \cos yz \cos zx)\cos xr \cos yr - 2(\cos yz - \cos zx \cos xy)\cos yr \cos zr \\
&-2(\cos zx - \cos xy \cos yz)\cos zr \cos xr \\
&= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx. \qquad (A)
\end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung für das Tetraeder soll im Folgenden nachgewiesen werden. Das Tetraeder sei $OFGH$,

$$OF = f, \quad OG = g, \quad OH = h$$

und die gegenüberliegenden Kanten

$$GH = a, \quad HF = b, \quad FG = c.$$

I.

OF, *OG*, *OH* haben die Richtung x, y, z, der Durchmesser d der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel habe die Richtung r, so ist

$$\cos xr : \cos yr : \cos zr : 1 = f : g : h : d,$$

mithin nach (A)

$$\begin{aligned} &f^2 \sin^2 yz + g^2 \sin^2 zx + h^2 \sin^2 xy - 2fg(\cos xy - \cos yz \cos zx) \\ (1) \quad &-2gh(\cos yz - \cos zx \cos xy) - 2hf(\cos zx - \cos xy \cos yz) \\ &= d^2(1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx). \end{aligned}$$

Diese Gleichung zur Berechnung des Durchmessers der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus drei zusammenstossenden Kanten und deren Winkel hat Legendre in seinen Elementen (Anm. V.) gegeben.

Anmerkung 1. Um sämmtliche Kanten des Tetraeders statt der Winkel in diese Gleichung einzuführen, hat man

$$\cos yz = \frac{g^2 + h^2 - a^2}{2gh}, \quad \cos zx = \frac{h^2 + f^2 - b^2}{2hf}, \quad \cos xy = \frac{f^2 + g^2 - c^2}{2fg}$$

und giebt der linken Seite L der obigen Gleichung die Form:

$$\begin{aligned} L = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos xy - 2gh\cos yz - 2hf\cos zx \\ + 4fg\cos yz \cos zx - (f\cos yz + g\cos zx - h\cos xy)^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos xy - 2gh\cos yz - 2hf\cos zx \\ + 4fg\cos yz\cos zx = \frac{c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + f^2g^2 + a^2b^2}{h^2}, \end{aligned}$$

$$f\cos yz + g\cos zx - h\cos xy = \frac{c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + 2f^2g^2}{2fgh},$$

und daher

$$\begin{aligned} 4f^2g^2h^2L &= 4f^2g^2a^2b^2 - (c^2h^2 - a^2f^2 - b^2g^2)^2 \\ &= (af + bg + ch)(af + bg - ch)(af - bg + ch)(-af + bg + ch). \end{aligned}$$

Nimmt man hinzu, dass, wie bekannt (vgl. Anm. 2.),

$$fgh\sqrt{1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx}$$

das 6fache Tetraeder V bedeutet, so erhält man

$$144\,V^2 d^2 = (af+bg+ch)(af+bg-ch)(af-bg+ch)(-af+bg+ch), \tag{2}$$

eine Gleichung, welche Crelle (Sammlung mathem. Aufsätze I. S. 117.) direct entwickelt hat.

Will man auch V durch die Kanten ausdrücken, so braucht man nicht bei dem Ausdruck stehen zu bleiben, welchen Legendre a. a. O. gegeben hat, indem er

$$g^2+h^2-a^2=F,\quad h^2+f^2-b^2=G,\quad f^2+g^2-c^2=H$$

abkürzend einführt, wobei mehrere gleiche und entgegengesetzte Glieder ungetilgt bleiben. Die weitere Entwickelung giebt

$$\begin{aligned}
4f^2g^2h^2(1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx)\\
= a^2f^2(g^2+h^2-f^2+b^2+c^2-a^2)\\
+b^2g^2(h^2+f^2-g^2+c^2+a^2-b^2)\\
+c^2h^2(f^2+g^2-h^2+a^2+b^2-c^2)\\
-a^2g^2h^2+b^2h^2f^2-c^2f^2g^2-a^2b^2c^2,
\end{aligned}$$

wie schon Meier Hirsch (Geom. Aufg. II. S. 112.) bemerkt hat, ohne den symmetrischen Bau des Ausdrucks durch geeignete Bezeichnung kenntlich zu machen.

Anmerkung 2. Es scheint unbeachtet geblieben zu sein, dass aus (3) sich unmittelbar die Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen eines ebenen Vierecks hinschreiben lässt, welche Lexell, Euler und zuletzt Carnot (Géom. de posit. §. 331.) ohne Zusammenfassung der Glieder entwickelt haben. Es ist im Allgemeinen

$$\begin{aligned}
1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy\cos yz\cos zx\\
=\sin^2 xy\sin^2 yz\sin^2 Y\\
=\sin^2 yz\sin^2 zx\sin^2 Z\\
=\sin^2 zx\sin^2 xy\sin^2 X,
\end{aligned}\tag{4}$$

wo X der Winkel der Ebenen ist, von denen eine x und y, die andere x und z parallel ist u. s. f., und nach der sphärischen Fundamentalformel

$$\cos X=\frac{\cos yz-\cos zx\cos xy}{\sin zx\sin xy}\quad \text{u. s. f.}$$

Die obigen Gleichungen (4) ergeben sich hieraus sofort durch Entwickelung von

$$(1-\cos^2 X)\sin^2 zx \sin^2 xy \text{ u. s. f.}$$

und bedeuten das Quadrat des 6fachen Tetraeders $OFGH$, dessen Kanten f, g, h Längeneinheiten sind, dessen Grundfläche z. B. $OFG=\frac{1}{2}\sin xy$, und dessen Höhe $\sin zx \sin X$ ist. Sind nun die Richtungen x, y, z derselben Ebene parallel, so ist X, Y, Z und das Tetraeder $=0$, mithin

$$1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy \cos yz \cos zx=0,$$

und daher

$$\begin{aligned} &a^2f^2(g^2+h^2-f^2+b^2+c^2-a^2)\\ &+b^2g^2(h^2+f^2-g^2+c^2+a^2-b^2)\\ &+c^2h^2(f^2+g^2-h^2+a^2+b^2-c^2)\\ &-a^2g^2h^2-b^2h^2f^2-c^2f^2g^2-a^2b^2c^2=0. \end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man direct, wenn man davon ausgeht, dass in diesem Falle die Winkel

$$xy+yz+zx=2m\pi$$

sind, wo m eine ganze Zahl oder 0 ist, daher

$$\cos xy=\cos(yz+zx) \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung 3. Aus $1+\cos X$ und $1-\cos X$, welche in Factoren zerlegbar sind, findet man bekanntlich $\sin^2 X \sin^2 zx \sin^2 xy$ oder

$$\begin{aligned} &1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy \cos yz \cos zx\\ &=4\sin\frac{xy+yz+zx}{2}\sin\frac{xy+yz-zx}{2}\sin\frac{xy-yz+zx}{2}\sin\frac{-xy+yz+zx}{2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für das 6fache Tetraeder, dessen zusammenstossende Kanten die Richtungen x, y, z haben und Längeneinheiten sind, hat unverkennbare Analogie mit dem bekannten Ausdruck zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den Seiten, welche sich wie folgt erklären lässt. Es sei O Mittelpunkt einer Kugel, auf deren Oberfläche die Punkte F, G, H liegen, so dass

$$OF=OG=OH=r$$

und

$$OFGH^2=\frac{r^6}{36}(1-\cos^2 xy-\cos^2 yz-\cos^2 zx+2\cos xy \cos yz \cos zx).$$

Ist p der Abstand des Mittelpunkts O von der Ebene FGH, so hat man auch

$$OFGH^2 = \frac{p^2}{9} FGH^2,$$

und daher

$$FGH^2 = \frac{r^6}{4p^2}(1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx)$$

$$= \frac{r^6}{4p^2} \sin^2 zx \sin^2 xy \sin^2 X \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{r^6}{p^2} \sin\frac{xy+yz+zx}{2} \sin\frac{xy+yz-zx}{2} \sin\frac{xy-yz+zx}{2} \sin\frac{-xy+yz+zx}{2}.$$

Für $r = \infty$ fallen die Bogen FG, GH, HF mit ihren Sehnen a, b, c, die Sinus der verschwindenden Mittelpunktswinkel mit den Winkeln, p mit r zusammen, und da der Bogen das Product seines Winkels mit dem Radius ist, so kommt

$$FGH^2 = \frac{1}{4}(bc \sin A) \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2},$$

wo der Winkel A, der im Dreieck FGH der Seite a gegenüberliegt, kein anderer ist, als X.

Da zugleich das Verhältniss des sphärischen Dreiecks FGH zur Kugelfläche verschwindet, so ist

$$X + Y + Z - 2 \text{ Rechte} = 0 \text{ oder } A + B + C = 2 \text{ Rechte.}$$

Dieser neue stereometrische Beweis des alten Satzes von der Summe der Dreieckswinkel setzt die Gleichheit zwischen einem sphärischen Dreieck und seinem Gegendreieck voraus, welche sich ohne Parallelentheorie durch Congruenzen beweisen lässt.

II.

In der Gleichung (A) sind die Gleichungen zwischen den Winkeln des Tetraeders, sowie zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, enthalten, welche Meier Hirsch (Geom. Aufg. II. §. 107. und §. 55.) durch gesonderte Methoden gewinnt.

Sind nämlich zuerst x, y, z, r die Richtungen der Normalen auf den Innenseiten OGH, OHF, OFG, FGH des Tetraeders $OFGH$, und bezeichnet OF den Winkel der Ebenen OFG und OFH u. s. w., so ist

$$\cos OF = -\cos yz, \quad \cos OG = -\cos zx, \quad \cos OH = -\cos xy;$$

$$\cos GH = -\cos xr, \quad \cos HF = -\cos yr, \quad \cos FG = -\cos zr;$$

folglich

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 OF - \cos^2 OG - \cos^2 OH - 2\cos OF \cos OG \cos OH \\
&= \sin^2 OF \cos^2 GH + \sin^2 OG \cos^2 HF + \sin^2 OH \cos^2 FG \\
&\quad + 2(\cos OH + \cos OF \cos OG) \cos GH \cos HF \\
&\quad + 2(\cos OF + \cos OG \cos OH) \cos HF \cos FG \\
&\quad + 2(\cos OG + \cos OH \cos OF) \cos FG \cos GH.
\end{aligned} \tag{5}$$

Sind zweitens x, y, z, r die Richtungen von den Radien MF, MG, MH, MO der Kugel, deren Mittelpunkt M ist und welche dem Tetraeder $OFGH$ umgeschrieben ist, und bezeichnet man die Seiten und Diagonalen des zugehörigen sphärischen Vierecks wie die gleichnamigen Kanten des Tetraeders, so ist

$$\cos f = \cos xr, \quad \cos g = \cos yr, \quad \cos h = \cos zr;$$

$$\cos a = \cos yz, \quad \cos b = \cos zx, \quad \cos c = \cos xy;$$

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c \\
&= \sin^2 a \cos^2 f + \sin^2 b \cos^2 g + \sin^2 c \cos^2 h \\
&\quad - 2(\cos c - \cos a \cos b) \cos f \cos g \\
&\quad - 2(\cos a - \cos b \cos c) \cos g \cos h \\
&\quad - 2(\cos b - \cos c \cos a) \cos h \cos f.
\end{aligned} \tag{6}$$

Führt man die Sinus der halben Bogen ein und schreibt der Kürze halber a statt $\sin\frac{a}{2}$ u. s. w., so nimmt die Gleichung (6) folgende Form an:

$$\begin{aligned}
&a^2f^2(g^2 + h^2 - f^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2g^2 - c^2h^2 + a^2f^2) \\
&+ b^2g^2(h^2 + f^2 - g^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2h^2 - a^2f^2 + b^2g^2) \\
&+ c^2h^2(f^2 + g^2 - h^2 + a^2 + b^2 - c^2 - a^2f^2 - b^2g^2 + c^2h^2) \\
&- a^2g^2h^2 - b^2h^2f^2 - c^2f^2g^2 - a^2b^2c^2 = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man alle Glieder mit der 6ten Potenz des Radius und setzt denselben unendlich, so verschwinden die Winkel und Sinus, während ihre Producte mit dem Radius die Sehnen statt der

Bogen geben. Dabei gehen die Glieder achter Dimension verloren, welche als endliche Grössen mit zweiter negativer Potenz des Radius multiplicirt erscheinen würden. So bleibt in der That die früher gegebene Gleichung für die Seiten und Diagonalen des ebenen Vierecks übrig.

III.

In (A) ist auch die Gleichung enthalten zwischen den Seiten des Tetraeders, oder allgemeiner, zwischen einem ebenen Flächenstück und seinen Coordinaten, d. h. seinen Projectionen auf je eine von drei willkührlichen Ebenen parallel dem Durchschnitt der beiden andern.

Sind x, y, z, r die Richtungen von OF, OG, OH und der Normale p von O zu FGH, so ist

$$OFGH = \frac{p}{3} FGH$$

$$= \frac{fgh}{6} \sqrt{1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx},$$

folglich, wenn man δ statt der Quadratwurzel schreibt,

$$FGH = \frac{fgh\delta}{2p}.$$

Ferner ist

$$OFG = \frac{fg \sin xy}{2} = \frac{fgh \sin xy \cos zr}{2p},$$

weil $h \cos zr = p$ u. s. w. Daher

$$(7)$$

$$FGH : OFG : OGH : OHF = \delta : \sin xy \cos zr : \sin yz \cos xr : \sin zx \cos yr.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (A) und bemerkt, dass (I. Anm. 2.)

$$\cos xy - \cos yz \cos zx = \sin yz \sin zx \cos Z \quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man ohne Weiteres

$$(8) \qquad FGH^2 = OFG^2 + OGH^2 + OHF^2 - 2 OFG.OGH.\cos Y$$
$$- 2 OGH.OHF.\cos Z - 2 OHF.OFG.\cos X.$$

Die allgemeine Geltung dieser Gleichung für irgend ein Ebenenstück und seine Coordinaten (im oben angegebenen Sinne) ergiebt sich, wenn man durch den Umfang des Ebenenstücks Pris-

men legt, deren Kanten je einer Coordinatenaxe x, y, z parallel sind. Die Durchschnitte dieser Prismen mit den Coordinatenebenen yz, zx, xy, d. h. die Coordinaten des Ebenenstücks E seien K, L, M, und die Normalen dieser Ebenen r, x', y', z'. Dann ist $E\cos xr = M\cos zz'$ = dem Normalschnitt des Prisma, wodurch E auf xy projicirt worden u. s. w. Folglich

$$E:K:L:M = 1 : \frac{\cos xr}{\cos xx'} : \frac{\cos yr}{\cos yy'} : \frac{\cos zr}{\cos zz'}.$$

Nun ist $\cos zz' = \sin zx \sin X$, wo X wie oben den Winkel der Coordinatenebenen an der Kante x bedeutet, also (I. Anm. 2.) $\cos zz' = \frac{\delta}{\sin yz}$ u. s. w. und wie in (7):

$$E:K:L:M = \delta : \sin yz \cos xr : \sin zx \cos yr : \sin xy \cos zr,$$

$$E^2 = K^2 + L^2 + M^2 - 2KL\cos Z - 2LM\cos X - 2MK\cos Y.$$

Anmerkung Die gefundene Gleichung hat denselben Bau, als die zwischen einer Strecke r und ihren Coordinaten x, y, z bestehende

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx. \qquad \text{(B)}$$

Wie man aus dieser die Summe der Quadrate von den Diagonalen eines Parallelepipeds ableitet (Legendre, Anmerk. V.), so ergiebt sich aus jener die Summe der Quadrate von den Diagonaldreiecken des Parallelepipeds (FGH, $OF'G'$, $OG'H'$, $OH'F'$, wenn OO', FF', GG', HH' die Diagonalen des Parallelepipeds sind, welchem das Tetraeder $OFGH$ angehört).

Auch lässt sich die Gleichung (8) aus (B) ableiten. Errichtet man nämlich auf den innern Seiten des Tetraeders $OFGH$ Normalen x, y, z, r, welche sich wie die Seiten verhalten, worauf sie stehen, so lassen sich diese Strecken zu einem räumlichen Viereck durch parallele Verschiebung zusammensetzen, wie sich durch die Methode der Projectionen leicht beweisen lässt. In diesem Viereck wird eine Seite durch die übrigen nach der Gleichung (B) ausgedrückt, worein man dann die proportionalen Werthe setzt und bemerkt, dass $\cos xy = -\cos Z$ u. s. w.

XII.

Ueber die durch die Gleichung

$$y = \sqrt{x}$$

dargestellten Kurven.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bau-Conducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Die Diskussion der Formel

$$y = \sqrt[x]{x} \; \dots\dots \; (1)$$

als Gleichung einer Kurve, wie sie Herr Professor Hessel in Nr. XIII. des 14. Theiles dieses Archivs niedergelegt hat, führt zu dem Resultate, dass gewisse Theile dieser Kurve keinen stetigen Zusammenhang besitzen, sondern wie punktirte Kurven erscheinen.

Dieses Resultat der unstetigen Bildung von y kann jedoch nur aus der Substitution unstetiger Werthe von x hervorgehen. Stetige Werthe von x führen immer zu stetigen Werthen von y, also auch zu stetigen Kurven, was man mit Hülfe der geometrischen Bedeutung der imaginären Zahlen folgendermaassen einsieht.

Stillschweigende Bedingung ist es, dass jede der beiden Zahlen x und y, z. B. die Zahl y, behuf geometrischer Konstruktion als eine Linie dargestellt werde, deren Länge dem absoluten Werthe, und deren Richtung dem Zeichen von y entspricht. Je nachdem das Zeichen von y gleich $+1$ oder gleich -1 ausfällt, ist diese Länge in der ursprünglich angenommenen, positi-

ven oder in der um 180° davon abweichenden, negativen Ordinatenrichtung zu messen. Es ist klar, dass wenn sich y mit dem allgemeineren Zeichen oder Richtungskoeffizienten $e^{\psi\sqrt{-1}}$ einstellen sollte, seine Länge in einer Richtung zu nehmen ist, welche sich unter dem Winkel ψ gegen die positive Ordinatenaxe neigt.

Es versteht sich von selbst, dass in derselben Weise bei der Auftragung der Abszisse x auf das Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen ist.

Nimmt man stets den Nullpunkt des Koordinatensystems zum Anfangspunkte von x und den Endpunkt von x zum Anfangspunkte von y; so beschreibt der Endpunkt von y die in Rede stehende Kurve.

Führen wir gleich von vorn herein für x den allgemeineren Ausdruck $re^{\varphi\sqrt{-1}}$, oder, wenn $r=e^\varrho$ gesetzt wird, den Ausdruck $x=e^{\varrho+\varphi\sqrt{-1}}$ ein; so kommt

$$y=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}=(e^{\varrho+\varphi\sqrt{-1}})^{e^{-\varrho-\varphi\sqrt{-1}}}=e^{(\varrho+\varphi\sqrt{-1})e^{-\varrho}e^{-\varphi\sqrt{-1}}}$$

$$=e^{e^{-\varrho}(\varrho+\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1})}=e^{e^{-\varrho}[(\varrho\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)+(\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi)\sqrt{-1}]}$$

$$=e^{e^{-\varrho}(\varrho\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}e^{e^{-\varrho}(\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi)\sqrt{-1}},$$

oder da $e^{-\varrho}=\frac{1}{r}$ ist,

$$y=e^{\frac{\varphi\sin\varphi+\varrho\cos\varphi}{r}}e^{\frac{\varphi\cos\varphi-\varrho\sin\varphi}{r}\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Von den beiden in der Abszisse $x=re^{\varphi\sqrt{-1}}$ vorkommenden Grössen r und φ darf man offenbar nur eine einzige unabhängig variiren lassen, wenn die Gleichung (1) eine Kurve zur Erscheinung bringen soll. (Nähme man sowohl r wie φ als unabhängig veränderlich an; so würde die obige Gleichung ein Flächenstück darstellen). Die meisten Untersuchungen der analytischen Geometrie beschränken sich auf den speziellen Fall, wo die Richtung der Abszissen x, also der Werth von φ, konstant erhalten und nur die Länge r derselben stetig variirt wird. Man nimmt jene konstante Abszissenrichtung gewöhnlich Ein Mal als mit der positiven und Ein Mal als mit der negativen Abszissenaxe zusammenfallend an, wodurch sich zwei besondere Systeme von Kurven ergeben, welche oftmals zwei zusammenhängende Schenkel Ein und derselben grösseren Kurve darstellen.

Durch die Bedingung, dass die Linie x stets in einer gewissen Richtung liegen soll, ist ihr arithmetischer Ausdruck $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ noch nicht vollkommen bestimmt. Es muss noch gesagt werden, wie viel ganze Umwälzungen nach der Einen oder anderen

Seite die Linie x stets um den Nullpunkt gemacht haben soll, ehe sie aus der ursprünglichen Abszissenaxe in die um den Winkel φ sich dagegen neigende Lage gekommen ist. Bezeichnet man die Anzahl jener ganzen Umwälzungen durch die ganze Zahl k, welche positiv oder negativ ist, jenachdem die Umwälzungen nach der positiven oder negativen Drehungsrichtung erfolgen sollen; so hat man, wenn φ jetzt den fundamentalen Neigungswinkel von x darstellt, $2k\pi+\varphi$ an die Stelle von φ zu setzen. Hierdurch wird Gleichung (2)

$$y=e^{\frac{(2k\pi+\varphi)\sin\varphi+\varrho\cos\varphi}{r}}\,e^{\frac{(2k\pi+\varphi)\cos\varphi-\varrho\sin\varphi}{r}\sqrt{-1}} \quad\ldots\ldots (3)$$

In dieser Gleichung ist nun, wenn die Abszisse x nach und nach bloss ihre Länge r stetig ändern soll, nicht allein die Grösse φ, sondern auch die Grösse k konstant zu erhalten.

Soll die Länge r von x nur in der Richtung der positiven Abszissenaxe variiren, also für die durch $x=+r$ dargestellten Abszissen, hat man $\varphi=0$, also

$$y=e^{\frac{\varrho}{r}}e^{\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}}=r^{\frac{1}{r}}e^{\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}}=\sqrt[r]{r}\,.\,e^{\frac{2k\pi}{r}\sqrt{-1}} \quad\ldots\ldots. (4)$$

Soll die Länge r von x nur in der negativen Abscissenaxe variiren, also für die durch $x=-r$ dargestellten Abszissen, hat man $\varphi=\pi$, also

$$y=e^{-\frac{\varrho}{r}}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{r}\sqrt{-1}}=r^{-\frac{1}{r}}e^{\frac{(2k+1)\pi}{-r}\sqrt{-1}}$$

$$=\sqrt[-r]{r}\,e^{\frac{(2k+1)\pi}{-r}\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt[r]{r}\,.\,e^{\frac{(2k+1)\pi}{r}\sqrt{-1}}} \quad\ldots\ldots\ldots (5)$$

So viel verschiedene Werthe man nun nach und nach für die ganze Zahl k einführt, ebenso viel verschiedene, aber vollkommen stetige Kurven liefert sowohl die Gleichung (4) wie auch die Gleichung (5). Nur dann, wenn man solche Werthe von y, bei welchen k nicht konstant erhalten wäre, zu einem Systeme von Ordinaten zusammenstellen wollte, oder auch dann, wenn man für dasselbe konstante k diejenigen Werthe von y ausschliessen wollte, welche nicht in die Richtung der positiven oder negativen Ordinatenaxe fielen, also auch nicht reell wären, würde man unstetige Kurven erhalten. Man erkennt leicht, dass die in dem obigen Aufsatze Nr. XIII. zum Vorschein kommenden diskontinuirlichen Bildungen zum Theil darin ihren Grund haben, dass unvermerkt für Ein und dieselbe Kurve die Grösse k nicht konstant erhalten ist, zum Theil darin, dass alle nicht reellen Werthe von y ausgeschlossen sind.

Zur weiteren Aufklärung wollen wir hier nur die auf **positive** Abszissen bezügliche Gleichung (4) etwas näher ins Auge fassen.

Dieselbe stellt, je nachdem man

$$k = \ldots\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

setzt, eine unendliche Menge ganz verschiedener Kurven dar.

Für $k=0$ ergibt sich die Kurve

$$y = \sqrt[r]{r} \ldots\ldots\ (6)$$

welche lauter positive Ordinaten besitzt. Da man für $r=0$ auch $y=0$ und für $r=\infty$, $y=1$ hat, so geht die Kurve durch den Nullpunkt, und hat eine in dem Abstande $y=1$ mit der Abszissenaxe parallel gezogene Linie zur Asymptote. Für $r=1$ ist ebenfalls $y=1$ und für $r=e=2{,}718\ldots\ldots$ besitzt die Ordinate

$$y = \sqrt[e]{e} = 1{,}444 \ldots\ldots$$

ihr Maximum. Dies gibt die auch auf der dritten Tafel in Theil XIV. abgebildete Kurve $OABCD\ldots.$ (Taf. III. Fig. 1.).

Für jede andere durch Gleichung (4) dargestellte Curve hat die Ordinate y dieselbe **Länge** $\sqrt[r]{r}$, welche demselben Werthe von r in der vorhergehenden Kurve (6) entspricht. Alle diese Kurven gehen also durch den Nullpunkt. Aber die **Richtungen** der Ordinaten y sind von den früheren verschieden. Der Neigungswinkel ψ einer solchen Ordinate gegen die positive Ordinatenaxe OY ist $\psi = \frac{2k\pi}{r}$. Wir wollen annehmen, die positive Drehungsrichtung der Ordinaten gehe von rechts nach links herum. Da für $r=\infty$, $\psi=0$ wird; so folgt, dass sich die Richtung der Ordinaten aller Kurven von einer gewissen Stelle an immer mehr und mehr der positiven Ordinatenrichtung nähert, je grösser r wird, und dass mithin die vorhin beschriebene Parallele zu OX eine gemeinschaftliche Asymptote für alle diese Kurven ist.

Wenn $r=4k$, ist $\psi=\frac{\pi}{2}$. Die Ordinate y erstreckt sich alsdann nach der Richtung der **negativen Abscissenaxe**. Für diesen Werth von r passirt die Kurve also die Abszissenaxe.

Für alle Werthe von $r > 4k$, ist $\psi < \frac{\pi}{2}$ und nimmt desto mehr ab, je mehr r zunimmt. Nachdem also $r > 4k$ geworden ist, kann die Richtung der Ordinate y nicht mehr **unter** die Abszissenaxe fallen; $r=4k$ bezeichnet vielmehr die schon vorhin

erwähnte Stelle, von wo ab die Ordinate immer mehr in die Richtung der positiven Ordinatenaxe zu gelangen strebt.

Für die Werthe von r, welche zwischen 0 und $4k$ liegen, macht die Ordinate y unendlich viele Rotationen; die Kurve durchschreitet die Abscissenaxe eben so viel Mal von oben kommend, wie von unten kommend, und bildet hier eben so viele Schlingen.

In diesem Zwischenraum nimmt die Ordinate y

1) das positive Zeichen $e^{2k\pi\sqrt{-1}}=+1$, also die Richtung der positiven Ordinatenaxe,

$$\text{für } r=\frac{k}{1},\ \frac{k}{2},\ \frac{k}{3},\ \frac{k}{4}\ldots;$$

2) das negative Zeichen $e^{(2k'+1)\pi\sqrt{-1}}=-1$, also die Richtung der negativen Ordinatenaxe,

$$\text{für } r=\frac{2k}{1},\ \frac{2k}{3},\ \frac{2k}{5},\ \frac{2k}{7}\ldots;$$

3) das positiv imaginäre Zeichen $e^{(2k'+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}}=+\sqrt{-1}$, also die Richtung der negativen Abszissenaxe,

$$\text{für } r=\frac{4k}{1},\ \frac{4k}{5},\ \frac{4k}{9},\ \frac{4k}{13}\ldots;$$

4) das negativ imaginäre Zeichen $e^{(2k'+\frac{3}{2})\pi\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$, also die Richtung der positiven Abscissenaxe,

$$\text{für } r=\frac{4k}{3},\ \frac{4k}{7},\ \frac{4k}{11},\ \frac{4k}{15}\ldots$$

an.

Eine Kurve dieser Art, und zwar die für $k=1$ sich ergebende, ist in dem Zuge *OabaAcdcfg* (Taf. III. Fig. 1.) dargestellt.

Keine zwei dieser Kurven sind identisch; aber dieselben haben für gewisse gleiche Längenwerthe r der Abszisse gleiche Ordinaten, also gemeinschaftliche Durchschnittspunkte. Der Punkt A für $r=1$ ist ihnen allen gemein, und überhaupt giebt es in dieser unendlichen Menge von Kurven für Ein und dasselbe rationale r nur eine endliche Menge verschiedener Ordinaten y, deren Anzahl so gross ist, als der Zähler des auf seine kleinste Benennung gebrachten Bruches r Einheiten enthält. Daraus folgt, dass der Punkt A, B, C, D, E....., welcher in der ersten Kurve (6) resp. den Werthen $r=1, 2, 3, 4, 5$... entspricht, resp. von allen, von der Hälfte, von dem 3ten, 4ten, 5ten ... Theile der in Rede stehenden Kurven passirt wird.

XIII.

Anwendung der perspectivischen Projection auf die analytische Auflösung der Aufgabe „Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Linien zweiten Grades zu finden“. Als Fortsetzung der Untersuchungen in Nr. XIII. des XI. Theils 2. Hefts dieses Archivs.

Von

Herrn Leopold Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

---

§. 1.

Wir bedienen uns hier der gleichen Bezeichnungen und Annahmen wie in dem so eben angeführten Aufsatze dieses Archivs, und nehmen

$$a^2(Y-g)^2+b^2(X+f)^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

als die Gleichung einer Ellipse an, deren Achsen $2a$ und $2b$, und deren Mittelpunktscoordinaten $-f$ und g sind; auch finden hier, wie in (12) jenes Aufsatzes, folgende Relationen zwischen den Coordinaten X und Y, und den diesen entsprechenden perspectivischen Coordinaten y', z' statt, nämlich:

$$\left.Y-g=\frac{vy'+(g-u)z'-gv}{v-z'}\,;\quad f+X=\frac{fv-(f-t)z'}{v-z'}\right\} \quad \ldots (2)$$

In diesen Gleichungen sind t, u, v die Coordinaten des Auges im Raume. Durch die Substitution dieser Werthe von X und Y finden wir endlich für die Gleichung der Perspective der Ellipse 1) folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\{a^2(y-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2\}z'^2+a^2v^2y'^2+2a^2(g-u)vy'z' \\ -2\{a^2g(g-u)+b^2f(f-t)-a^2b^2\}vz'-2a^2v^2y'+\{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2\}v^2\end{array}\right\}=0 \quad (3)$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen einen Kegelschnitt aus. Wir wollen nun den geometrischen Ort des Auges (t, u, v) zu bestimmen suchen, wenn dieser Kegelschnitt eine Kreislinie wird. In diesem Falle müssen bekanntlich die beiden Bedingungsgleichungen:

$$a^2(g-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2=a^2v^2 \;\ldots\ldots\; (4)$$

$$(g-u)v=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

statt finden. Die Gleichung (5) zerfällt aber wieder in

$$v=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

und in:

$$g-u=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7).$$

Nehmen wir zuerst die Gleichungen (4) und (6) als gleichzeitig bestehend an, so sehen wir dass erstere ein eintheiliges Hyperboloid, letztere die Ebene der xy darstellt, beide zugleich geben also die Durchschnittscurve der Ebene xy mit jenem Hyperboloid, welche durch die Gleichung:

$$\frac{(g-u)^2}{b^2}+\frac{(f-t)^2}{a^2}=1 \;\ldots\ldots\; (8)$$

dargestellt wird Setzen wir in der Gleichung (3)

$$a^2(g-u)^2+b^2(f-t)^2-a^2b^2=a^2v^2,$$

und hernach $v=0$, so erhalten wir die identische Gleichung $0=0$. Es muss also der Werth $v=0$ verworfen werden. Nehmen wir hingegen die Gleichungen (4) und (7) gleichzeitig bestehend an, se finden wir, weil $g-u=0$ die Gleichung einer auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene ist, deren Durchschnitt mit dem Hyperboloid (4) durch die Gleichung:

$$v^2=\frac{b^2}{a^2}\{(f-t)^2-a^2\} \;\ldots\ldots\; (9)$$

dargestellt ist: dass die Perspective der Ellipse (1) eine Kreislinie wird, wenn sich das Auge (t, u, v) auf einer durch die Gleichung (9) ausgedrückten Hyperbel befindet, deren Ebene auf der Ebene der gegebenen Ellipse und auf der Tafel senkrecht steht.

Für die Gleichung der Kreislinie selbst, welche die Perspective der Ellipse (1) in diesem Falle vorstellt, finden wir nachstehende:

$$z'^2+y'^2-\frac{2b^2}{a^2v}\{f(f-t)-a^2\}z'-2gy'+\frac{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}{a^2}=0 \quad (10)$$

§. 2.

Geben wir statt der Ellipse (1) eine Hyperbel, deren Gleichung

$$a^2(Y-g)^2-b^2(f+X)^2=-a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ist, so finden wir durch eine ganz gleiche Untersuchung wie in §. 1. dass ihre Perspective eine Kreislinie wird, wenn sich das Auge (t, u, v) auf einer Ellipse bewegt, deren Ebene durch das Auge geht, und senkrecht auf der Ebene der Hyperbel (11) und auf der Tafel ist. Die Gleichung dieser Ortsellipse ist:

$$v^2=\frac{b^2}{a^2}\{a^2-(f-t)^2\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Gleichung der Kreislinie, welche in diesem Fall die Perspective der Hyperbel (11) vorstellt, wird alsdann folgende:

$$z'^2+y'^2+\frac{2b^2}{a^2v}\{f(f-t)-a^2\}z'-2gy'+\frac{a^2g^2-b^2f^2+a^2b^2}{a^2}=0 \ldots (13)$$

§. 3.

Nehmen wir für die perspectivisch zu projicirende Curve eine Parabel, deren Gleichung:

$$Y-g=-\sqrt{p(f+X)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ist, und wenden auf diese dasselbe Verfahren an, wie bei der Ellipse (1), so finden wir, dass sich diese Parabel perspectivisch als Kreis projicirt, wenn sich das Auge auf einer zweiten Parabel vom gleichen Parameter bewegt; die Ebene dieser ist ebenfalls auf der Ebene der Parabel (14) und auf der Tafel senkrecht. Die Gleichung der Ortsparabel des Auges ist:

$$v^2=p(t-f) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Der perspectivische Kreis wird aber durch die Gleichung:

$$z'^2+y'^2+\frac{p(2f-t)}{v}z'-2gy'+g^2-fp=0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

ausgedrückt.

§. 4.

Um der Vollendung unserer Aufgabe näher zu rücken, suchen wir die Bedingungen auf, unter welchen irgend eine Linie zweiten Grades in einer ganz beliebigen Lage gegen die Tafel, nur in der gleichen Ebene wie die Curven §. 1. (11) und (14) liegend, sich perspectivisch als Kreis projicirt, und nehmen daher

$$AY^2+2BXY+CX^2+2DY+2EX+F=0 \quad \ldots\ldots (17)$$

als die Gleichung der zu projicirenden Linie an. Die Relationen, welche zwischen den perspectivischen Coordinaten y', z' und den Coordinaten X, Y, Z statt finden, werden durch die Gleichungen:

$$X=\frac{tz'}{v-z'},\quad Y=\frac{vy'-uz'}{v-z'}$$

dargestellt, m. s. Archiv Theil XI. Heft 2. pag. 121. Nr. I. Durch die Substitution dieser Werthe von X und Y in (17) erhalten wir als Gleichung der Perspective der Curve (17) folgende:

$$(19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\{Au^2-2But+Ct^2+2Du-2Et+F\}z'^2+Av^2y'^2-2v\{Au-Bt+D\}y'z'\\ -2v\{Du-Et+F\}z'+2Dv^2y'+Fv^2\end{array}\right\}=0.$$

Soll diese Gleichung einem Kreise angehören, so müssen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$Au^2-2But+Ct^2+2Du-2Et+F=Av^2 \quad \ldots\ldots (20)$$

$$Au-Bt+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

statt finden; eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen die Grösse u, so erhalten wir:

$$A^2v^2+(B^2-AC)t^2-2(BD-AE)t+D^2-AF=0 \quad \ldots\ldots (22)$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades aus, auf welcher sich das Auge bewegen muss, damit die Perspective der Curve (17) ein Kreis wird, und zwar befindet sich diese Linie (22) in einer Ebene, welche auf der Ebene der xy, oder auf jener der Curve (17), senkrecht steht, und welche durch die Gleichung (21) dargestellt wird.

Für die Gleichung der Kreislinie, welche die Perspective der Curve (17) ist, erhalten wir:

$$z'^2+y'^2-2\frac{\{(BD-AE)t-(D^2-AF)\}}{A^2v}z'+2\frac{D}{A}y'+\frac{F}{A}=0 \quad \ldots (23)$$

§. 5.

Nehmen wir zuerst an, die durch die Gleichung (17) dargestellte Curve sei eine Ellipse, so muss bekanntlich

$$B^2-AC<0 \text{ und } (BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)>0$$

sein; wir können daher zufolge unserer Annahme

$$B^2-AC=-n \qquad (24)$$

$$(BD-AE)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)=m^2 \qquad (25)$$

setzen; n ist eine numerische, m hingegen eine lineare Grösse. Dadurch wird

$$C=\frac{B^2+n}{A},\quad F=\frac{(BD-AE)^2+nD^2-m^2}{An};$$

also

$$D^2-AF=\frac{m^2-(BD-AE)^2}{n}.$$

Setzen wir überdies noch der Kürze wegen $BD-AE=c$; so haben wir statt der Gleichungen (17), (22) und (23) folgende:

$$nA^2Y^2+2ABnXY+n(B^2+n)X^2+2nADY+2n(BD-c)X$$
$$+c^2+nD^2-m^2=0 \qquad (26)$$

$$A^2v^2n-n^2t^2-2cnt+m^2-c^2=0 \qquad (27)$$

$$x'^2+y'^2-2\frac{\{c(nt+c)-m^2\}}{A^2nv}x'+2\frac{D}{A}y'+\frac{c^2+nD^2-m^2}{A^2n}=0 \qquad (28)$$

Sind α', β' die Mittelpunktscoordinaten, und r' der Radius des durch die Gleichung (28) dargestellten Kreises, so ist bekanntlich, wenn die Gleichung (27) benutzt wird:

$$\left.\alpha'=-\frac{D}{A},\quad \beta'=\frac{c(nt+c)-m^2}{A^2nv};\quad r'=\frac{tm}{A^2v}\right\} \qquad (29)$$

Endlich finden wir, mit Berücksichtigung der Gleichung (9), für die Mittelpunktscoordinaten α, β und den Radius r des Kreises (10) folgende Werthe:

$$\left.\alpha=g,\quad \beta=\frac{b^2}{a^2v}\{f^2-a^2-ft\};\quad r=\frac{b^2t}{av}\right\} \qquad (30)$$

§. 6.

Um unsere späteren Folgerungen gehörig begründen zu können, wollen wir auf analytischem Wege erweisen „dass, wenn von irgend „einem Punkte k eine Tangente an die Curve (26) des vorigen „Paragraphen gezogen wird, die perspectivische Projection dieser „Tangente, ebenfalls eine durch die perspectivische Projection k_p des „Punktes k gehende Berührende an den Kreis (28) ist, und „zwar muss diese letztere diesen Kreis in demjenigen Punkte be„rühren, welcher die perspectivische Projection des Berührungs„punktes der erstern Tangente und der Ellipse (26) ist.

Wir nehmen X'', Y'' für die Coordinaten des Punktes k, und X', Y' für die Coordinaten des Berührungspunktes der durch k an die Ellipse (26) gezogenen Tangente an; ferner seien y''', z''' die perspectivischen Coordinaten des Punktes k_p, und y'', z'' jene des Berührungspunktes der durch k_p an den Kreis (28) gezogenen Tangente; so haben wir für die Gleichung der ersteren Tangente:

$$\left.\begin{array}{l} nA\{AY'+BX'+D\}Y''+n\{ABY'+(B^2+n)X'+BD-c\}X'' \\ +nADY'+n(BD-c)X'+c^2+nD^2-m^2=0 \end{array}\right\} \quad (31)$$

und für jene der letztern Tangente:

$$z''z'''+y''y'''-\left\{\frac{c(nt+c)-m^2}{A^2vn}\right\}(z''+z''')+\frac{D}{A}(y''+y''')+\frac{F}{A}=0 \quad (32)$$

Es wird unsere im Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung erwiesen sein, wenn wir in der Gleichung (31) die Werthe von X', Y'; X'', Y'' durch die entsprechenden perspectivischen Coordinaten y'', z'' und y''', z''' ausgedrückt, substituiren, und wenn wir alsdann eine resultirende Gleichung erhalten, die mit der in (32) identisch ist.

Nach §. 4. ist aber

$$X'=\frac{tz''}{v-z''},\quad X''=\frac{tz'''}{v-z'''};\quad Y'=\frac{vy''-uz''}{v-z''},\quad Y''=\frac{vy'''-uz'''}{v-z'''};$$

oder, weil wegen der Gleichung 21) §. 4. $u=\frac{Bt-D}{A}$; und aus 28) §. 5. $t=\frac{-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}}{n}$; so ist:

$$X'=\frac{[-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}]z''}{n(v-z'')},\quad X''=\frac{[-c\pm\sqrt{m^2+A^2v^2n}]z'''}{n(v-z''')};$$

$$Y' = \frac{nAvy'' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z''}{An(v - z'')},$$

$$Y'' = \frac{nAvy''' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z'''}{An(v - z''')}.$$

Durch die Substitution dieser Coordinatenwerthe in der Gleichung (31) erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\{Anvy''' - [B(-c \pm \sqrt{m^2 + A^2v^2n}) - nD]z'''\}(Avy'' + Dv)}{(v - z'')(v - z''')} \\ + \dfrac{\{ABvy'' + z''\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + (BD - c)v\}(-c + \sqrt{m^2 + A^2v^2n})z'''}{(v - z'')(v - z''')} \\ + \dfrac{\{ADnvy'' + (-c\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + m^2)z'' + cv^2 + nD^2v - m^2v\}(v - z''')}{(v - z'')(v - z''')} \end{array}\right\} = 0.$$

Reduciren wir diese Gleichung gehörig, und bemerken, dass wegen Gleichung (28)

$$v^2(c^2 + nD^2 - m^2) = v^2FAn$$

und

$$-c\sqrt{m^2 + A^2v^2n} + m^2 = -\{c(nt + c) - m^2\}$$

ist, so wird dieselbe mit der Gleichung (32) identisch. Ganz auf gleiche Art würden wir eine mit der Gleichung (31) identische Gleichung erhalten haben, wenn wir in der Gleichung (32) statt y'', z''; y''', z''' respective die Werthe:

$$\frac{AtY' + (Bt - D)X'}{A(t + X')}, \frac{vX'}{t + X'}; \frac{AtY'' + (Bt - D)X''}{A(t + X'')}, \frac{vX''}{t + X''}$$

substituirt hätten, wodurch also die vorausgeschickte Bemerkung dieses Paragraphen nicht nur gerechtfertigt ist, sondern wir sind dadurch auch berechtigt zu folgern, dass eine Gerade L_p, welche die beiden Kreise, welche durch die Gleichungen (10) §. 1. und (28) §. 5. dargestellt wird, gemeinschaftlich berührt, die Perspective einer gemeinschaftlichen Tangente L an die durch die Gleichungen (1) §. 1. und (2) §. 5. dargestellten Ellipsen ist.

§. 7.

Um zu untersuchen, ob und in welchen Fällen es möglich ist, eine gemeinschaftliche Tangente an die Ellipsen (1) §. 1. und (28) §. 5. zu ziehen, müssen wir zuvor untersuchen, ob es wirklich einen reellen Punkt gibt, in welchem sich das Auge befinden kann, damit die Perspectiven der Ellipsen (1) §. 1. und (28) §. 5.

beide zugleich Kreise werden. Dieses wird aber nur dann der Fall sein, wenn es reelle Durchschnittspunkte der Ortscurven, welche durch die Gleichungen (9) §. 1. und (27) §. 5. dargestellt sind, gibt. Diese Curven liegen in den durch die Gleichungen

$$g-u=0 \text{ und } Au-Bt+D=0$$

dargestellten Ebenen; die Gleichungen der Durchschnittslinie dieser Ebenen sind:

$$\left.u=g \text{ und } u=\frac{B}{A}t-\frac{D}{A}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Diese Linie ist also, wie sich schon aus der Lage der genannten Ebenen schliessen lässt, auf der Ebene xy senkrecht. Aus den Gleichungen (33) folgt:

$$\left.g=\frac{Bt}{A}-\frac{D}{A}, \text{ also } t=\frac{A}{B}g+\frac{D}{B}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34).$$

Führen wir diesen Werth von t in (9) §. 1. ein, so erhalten wir:

$$v=\pm\frac{b}{aB}\sqrt{\{[Bf-Ag-D]^2-a^2B^2\}}$$

oder

$$v=\pm\frac{b}{aB}\sqrt{[B(f+a)-Ag-D][B(f-a)-Ag-D]} \quad \ldots \quad (35).$$

Soll daher die Auflösung der Aufgabe möglich sein, so muss entweder

$$\left.\begin{array}{r} B(f+a)>Ag+D \\ \text{und zugleich } B(f-a)>Ag+D \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} B(f+a)<Ag+D \\ \text{und zugleich } B(f-a)<Ag+D \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

sein. Wir erhalten aber noch eine andere Beziehungsgleichung, welche die Bedingung der Lösbarkeit der Aufgabe angibt. Nämlich wenn wir die soeben gefundenen Werthe von t und v in der Gleichung (27) §. 5. substituiren, so erhalten wir die Bedingungsgleichung:

$$nA^2b^2[Bf-Ag-D]^2-nA^2B^2a^2b^2-n^2a^2(Ag+D)^2-2a^2cnB(Ag+D)$$
$$+a^2m^2B^2-a^2c^2B^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

§. 8.

Es handelt sich nach dem, was wir im §. 6. und §. 7. gezeigt haben, nur noch darum, die Coordinaten derjenigen zwei Punkte A_p und J_p zu bestimmen, aus welchen äussere und innere Tangenten an die Kreise (10) §. 1. und (28) §. 5. gezogen werden können, und alsdann mittelst dieser Coordinatenwerthe diejenigen von den Punkten in der Ebene der xy oder in der Ebene der beiden Ellipsen (1) §. 1. und (26) §. 5. zu bestimmen, von welchen A_p und J_p die perspectivischen Projectionen sind. Die ersteren sind aber offenbar der directe und der inverse Aehnlichkeitspunkt der obengenannten Kreise. Bezeichnen wir mit y'_1, z'_1 die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes A_p oder J_p der Kreise in (10) und (26), so sind diese bekanntlich:

$$y'_1 = \frac{r\alpha' \mp r'\alpha}{r \mp r'},\quad z'_1 = \frac{r\beta' \mp r'\beta}{r \mp r'} \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \ (36).$$

Führen wir zuvor in den Gleichungen (29) und (30) §. 5. die Werthe von t und v aus (34) und (35) §. 7. ein, und substituiren die so bestimmten Ausdrücke von α, β, r, α', β' und r' in diesen Werthen von y'_1 und z'_1, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= \frac{-ADb^2 \mp mag}{A^2b^2 \mp am}, \\ z'_1 &= \frac{bn(Ag+D)[ac \mp fm] + Bb[a(c^2-m^2) \mp nm(f^2-a^2)]}{n(A^2b^2 \mp am)\sqrt{[Bf-Ag-D]^2 - a^2B^2}} \end{aligned}\right\} (40).$$

Sind endlich X_1 und Y_1 die Coordinaten des dem Punkte A_p oder J_p entsprechenden Punktes A oder J in der Ebene der xy, so haben wir zu deren Bestimmung nach §. 4. die Formeln

$$X_1 = \frac{tz'_1}{v - z'_1},\quad Y_1 = \frac{vy'_1 - uz'_1}{v - z'_1}.$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken $u = g$ (Siehe §. 1. (6),

$$t = \frac{Ag+D}{B},\quad v = \frac{b}{aB}\sqrt{[Bf - Ag - D]^2 - a^2B^2};$$

und statt y'_1 und z'_1 die in (40) angegebenen Werthe, so haben wir:

---

*) Die obern Zeichen gelten für den directen, die untern für den inversen Aehnlichkeitspunkt.

$$\varphi_1 = [illegible]$$

$$\psi_1 = [illegible] \qquad (41).$$

Benutzt man die Gleichung (38), so erhält man

$$\varphi_1 = [illegible]$$

$$\psi_1 = [illegible] \qquad (42).$$

Zieht man nun von dem durch diese Coordinaten X_1 und Y_1 bestimmten Punkte eine Tangente an eine der durch die Gleichung (1) §. 1. oder (26) §. 5. dargestellten Ellipsen, so muss diese auch, nach dem was in §. 6. bewiesen worden ist, die andere Ellipse berühren, wie es verlangt wurde.

§. 9.

Nehmen wir jetzt an, die Gleichung (17) §. 4. stelle eine Parabel dar, so muss bekanntlich

$$B^2-AC=0 \text{ und } BD-AE \gtrless 0$$

sein; es sei nun

$$BD-AE=-m \text{ und } B^2-AC=0,$$

wo m eine lineare Grösse ist, so geht der Gleichung (22) §. 4. in folgende über:

$$A^2v^2+2mt+D^2-AF=0,$$

oder da D^2-AF jede reelle Grösse von zwei Dimensionen bedeuten kann, so nehmen wir $D^2-AF=k^2$ an; dadurch wird die letzte Gleichung zu:

$$A^2v^2+2mt+k^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43).$$

Die Gleichung (17) hingegen geht bei diesen Annahmen in folgende über:

$$A^2Y^2+2ABXY+B^2X^2+2ADY+2(BD+m)X+D^2-k^2=0 \quad (44).$$

Statt der Gleichung (33) erhalten wir:

$$x'^2+y'^2+2\frac{mt+k^2}{A^2v}x'+\frac{D}{2A}y'+\frac{D^2-k^2}{A^2}=0 \quad \ldots \quad (45)$$

Diese Gleichung drückt denjenigen Kreis aus, welcher die Perspective der Parabel in (44) ist:

Werden wieder die Mittelpunktscoordinaten des in (16) §. 3. dargestellten Kreises mit α, β und dessen Radius mit r bezeichnet, so wie jene des Kreises in (45) mit α', β' und dessen Radius mit r', so ist:

$$\alpha=g,\ \beta=-\frac{p(2f-t)}{2v},\ r=\frac{t\sqrt{p}}{2\sqrt{t-f}} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

$$\alpha' = -\frac{D}{A}, \beta' = -\frac{mt+k^2}{A^2v}, r' = \frac{mt}{A^2v} \Big\} \quad \ldots\ldots (47)$$

Da aber die Parabel in (15) §. 3., welche der geometrische Ort des Auges ist, damit die gegebene Parabel in (14) sich als Kreis projicirt, in einer auf die Basis senkrechten Ebene liegt, deren Gleichung $g-u=0$ ist, als auch die Ortscurve (43) sich in der durch die Gleichung

$$Au - Bt + D = 0$$

ausgedrückten Ebene befindet, so muss sich das Auge, damit die beiden in (14) und in (44) gegebenen Parabeln sich zugleich als Kreise projiciren, sowohl in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, als auch in den Durchschnittspunkten der Curven (15) §. 3. und (43) befinden; diese Durchschnittspunkte (wenn solche möglich sind) können aber nur auf der Durchschnittslinie der durch die Gleichungen

$$g-u=0 \text{ und } Au-Bt+D=0$$

dargestellten Ebenen liegen. Eliminiren wir daher aus diesen Gleichungen die Grösse u, so erhalten wir wieder $t=\frac{Ag+D}{B}$; führen wir diesen Werth von t in der Gleichung (15) §. 2. ein, so kommt:

$$v^2 = p\,\frac{Ag+D-Bf}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Dieser Werth von v^2, und jener von t in (43) eingeführt, gibt die Beziehungsgleichung an, welche zwischen den Coefficienten, A, B, D, p u. s. w. statt finden muss, damit die Aufgabe möglich wird; diese ist:

$$(Ag+D)(A^2p+2m) - B(A^2fp-k^2) = 0 \quad \ldots\ldots (49).$$

§. 10.

Durch die Einführung der im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe von t und v in den Gleichungen (46) und (47) erhalten wir:

$$\alpha = g, \; \beta = \frac{\{(Ag+D)-2Bf\}\sqrt{p}}{2\sqrt{B\{(Ag+D)-Bf\}}}; \; r = \frac{(Ag+D)\sqrt{p}}{2\sqrt{B\{(Ag+D)-Bf\}}} \Big\} \quad (50)$$

$$\alpha' = -\frac{D}{A},\ \beta' = -\frac{\{m(Ag+D)+Bk^2\}}{A^2\sqrt{pB}\{(Ag+D)-Bf\}};$$

$$r' = \frac{m(Ag+D)}{A^2\sqrt{pB}\{(Ag+D)-Bf\}} \Big\} \ldots\ldots (51)$$

Bezeichnen wir wieder wie in §. 8. die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes A_p oder J_p der Kreise (16) §. 3. und (45) §. 9. mit y'_1 und z'_1, so erhalten wir durch die Einführung dieser Werthe von α, β, r, α', β' und r' in den Gleichungen (39) §. 8:

$$y'_1 = \frac{-DAp \mp 2mg}{A^2p \mp 2m},$$

$$z'_1 = \frac{[-\{m(Ag+D)+Bk^2\} \mp m\{(Ag+D)-2Bf\}]\sqrt{p}}{\{A^2p \mp 2m\}\sqrt{B}\{(Ag+D)-Bf\}} \Bigg\} \ldots (52).$$

Die oberen Zeichen gelten für den directen, die unteren für den inversen Aehnlichkeitspunkt.

Führen wir die Werthe von t, u, v, z'_1, y'_1 in die Formeln

$$X_1 = \frac{tz'_1}{v - z'_1},\quad Y_1 = \frac{vy'_1 - uz'_1}{v - z'_1}$$

ein, so erhalten wir für das obere Zeichen in jenen Werthen:

$$X_1 = \frac{(Ag+D)\{B(2fm-k^2)-2m(Ag+D)\}}{B\{2m(Ag+D)+Bf(A^2p-2m)\}}$$

$$Y_1 = \frac{-ADp\{(Ag+D)-Bf\}+Bgk^2}{A^2p\{(Ag+D)-Bf\}+Bk^2};\ \Bigg\} \ldots (53)$$

oder, wenn wir die Gleichung (49) benutzen, so wird:

$$Y_1 = \frac{+ADp\{(Ag+D)-Bf\}-Bgk^2}{2m(Ag+D)} \ldots\ldots (54).$$

Für die unteren Zeichen in (52) erhalten wir:

$$X_1 = \frac{-(Ag+D)(2fm+k^2)}{Bf(A^2p+2m)} \ldots\ldots (55)$$

$$Y_1 = \frac{-ADp\{(Ag+D)-Bf\}+2mg(Ag+D)+gBk^2}{A^2p\{(Ag+D)-Bf\}+2m(Ag+D)+Bk^2}\ (56).$$

Benutzen wir in diesem letzten Werthe von Y_1 die Gleichung (49), so wird der Nenner zu Null, woraus hervorgeht, dass man die unteren Zeichen nicht nehmen darf, d. h. dass es bei zwei Parabeln nicht zwei Aehnlichkeitspunkte gibt; die Werthe in (55) und (56) sind also unbrauchbar.

Wird aus demjenigen Punkte, dessen Coordinatenwerthe in (43) und (45) dargestellt sind, eine Tangente an eine durch die Gleichungen (14) §. 3. oder (44) §. 9. dargestellten Parabeln gezogen, so muss diese, nach dem, was in §. 6. erwiesen wurde, auch die andere berühren.

Führen wir die Untersuchung ganz auf gleiche Art, wie dies in den früheren Paragraphen bei zwei Ellipsen geschehen ist, bei zwei Hyperbeln, so werden wir, ebenso wie dort, bestimmte Werthe für die Coordinaten eines Punktes erhalten, welcher die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man aus ihm eine Tangente an eine der gegebenen Hyperbeln zieht, jene Tangente auch die andere Hyperbel berührt.

Aus dem in §. 6. Erwiesenen lässt sich unmittelbar folgender Satz herleiten. „Wenn man drei Ellipsen von beliebigen „Parametern, und in beliebiger Lage (jedoch in einer Ebene) hat, „und man zieht an je zwei derselben die äussern und die innern „Tangenten, so liegen die drei Durchschnittspunkte der äussern „Tangenten, so wie je zwei innere, mit den nicht zugehörigen „äussern in gerader Linie.“ Sind nämlich, M_1, M_2, M_3 die drei gegebenen Ellipsen, A_1 der Durchschnittspunkt der äussern Tangenten an die Ellipsen M_2 und M_3;

A_2	jener der äussern Tangenten an die Ellipsen	M_1	und M_3
A_3	- - - - - - -	M_1	- M_2
J_1	- - innern - - - -	M_2	- M_3
J_2	- - - - - - -	M_1	- M_3
J_3	- - - - - - -	M_1	- M_2

so liegen

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$
$$A_1,\ J_2,\ J_3$$
$$A_2,\ J_1,\ J_3$$
$$A_3,\ J_1,\ J_2$$

in gerader Linie.

Denn projicirt man die Ellipsen als drei Kreise Mp_1, Mp_2, Mp_3; und zieht an je zwei die äussern und innern Tangenten, und bezeichnet die Durchschnittspunkte der äussern Tangenten an die

Kreise M^{p}_1 und M^{p}_2; M^{p}_1 und M^{p}_3; M^{p}_2 und M^{p}_3 respective mit A^{p}_3, A^{p}_2 und A^{p}_1; ebenso die Durchschnittspunkte der innern Tangenten an die Kreise M^{p}_1 und M^{p}_2; M^{p}_1 und M^{p}_3; M^{p}_2 und M^{p}_3 respective mit J^{p}_3, J^{p}_2 und J^{p}_1. so hat Monge bewiesen, dass die Punkte

$$A^{p}_1,\ A^{p}_2,\ A^{p}_3;\ A^{p}_1,\ J^{p}_2,\ J^{p}_3;\ A^{p}_2,\ J^{p}_1,\ J^{p}_3;\ A^{p}_3,\ J^{p}_1,\ J^{p}_2$$

in gerader Linie liegen. Projicirt man die sechs Punkte

$$A^{p}_1,\ A^{p}_2,\ A^{p}_3,\ J^{p}_1,\ J^{p}_2,\ J^{p}_3$$

wieder in die geometrische Bildfläche nach

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3$$

zurück, so werden auch nach §. 6. diese die Eigenschaft besitzen, dass jede aus ihnen gezogene Tangente an eine der Ellipsen M_1, M_2, M_3 noch eine zweite derselben berührt; ferner werden auch, ebenfalls nach dem vorher Erwiesenen, die Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3$$

auf den entsprechenden Linien liegen, auf welchen sich ihre perspectivischen Projectionen befinden, also

$$(A_1\ A_2\ A_3),\ (A_1\ J_2\ J_3),\ (A_2\ J_1\ J_3),\ (A_3\ J_1\ J_2)$$

vier gerade Linien bilden.

XIV.

Die astronomische Wärme- u. Licht-Vertheilung auf der Erdoberfläche.

Von dem

Lehrer Herrn Brenner

zu Tuttlingen.

Die freie Wärme, welche, nebst dem Lichte, hauptsächlich die Existenz der organischen Körperwelt bedingt, wird der Erdoberfläche aus zwei Hauptquellen zugeführt. Die eine ist der Wärmevorrath, den die Erde in ihrem Innern birgt, die andere die Sonne. Da wir nun von der Wärmemenge des Erdkerns, so wie von der Wärmeströmung gegen die Oberfläche noch keine genaue Kenntniss haben, übrigens aber von einzelnen Gegenden (Island, Grönland) wissen, dass sie aus der Erde eine weit grössere Quantität Wärme beziehen, als andere Gegenden, so lässt sich über den Ausfluss dieser Wärmequelle wohl keine allgemeine Regel angeben. Weit mehr Hoffnung scheint vorhanden zu sein zur Bestimmung der von der Erde ausfliessenden Wärmemenge für jede besondere Gegend, besonders wenn man sie mit der von der Sonne gespendeten (Wärmemenge) zu vergleichen sucht. Die letztere aber, die Sonne, verbreitet ihre Wärme auf solche Weise, dass sich die Verhältnisse der Wärmemengen für verschiedene Gegenden genau bestimmen lassen, — Verhältnisse, denen auch die Lichtverbreitung derselben unterworfen ist. In Beziehung auf die Wärme ist zwar bekannt, dass sie durch die Sonne aus den Körpern nur entwickelt (frei) wird; dessen ungeachtet können wir uns, für unsern Zweck, vorstellen, sie sei wirklich ein Ausfluss von der Sonne.

Die von der Sonne herrührende Wärme- und Lichtvertheilung auf der Erdoberfläche nennen wir die astronomische, und die

Wärme- und Lichtverhältnisse, oder auch die Wärme- und Lichtmengen für verschiedene Gegenden zu bestimmen, sei der Gegenstand unserer Beschäftigung.

Es ist bekannt, dass sich die auf gleiche ebene Flächen geworfenen Wärme- und Lichtmengen verhalten wie die Sinus der Neigungswinkel der auffallenden Strahlen. Es werde nun die in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit senkrecht geworfene Wärme- oder Lichtmenge zur Einheit angenommen, so ist dieselbe bei einer Neigung N der Sonnenstrahlen gegen den Horizont

$$=\sin N.$$

Diese Neigung der Sonnenstrahlen ist aber nichts anders, als die Höhe der Sonne. Es sei daher (Taf. III. Fig. 2.) HR der Horizont des Ortes, Z dessen Zenith, AQ der Aequator, P der Nordpol, DE der an einem beliebigen Tage von der Sonne beschriebene Parallelkreis, L der Standpunkt derselben zu einer beliebigen Nachmittagsstunde. Ziehe ich durch L den Vertikalkreis ZU, so wie den Meridian PT, so ist im sphärischen Dreieck ZPL

$$\cos ZL=\cos ZP.\cos PL+\sin ZP.\sin PL.\cos ZPL.$$

Setze ich die Breite des Ortes $=\beta$, die statthabende Declination der Sonne $=\delta$, den Stundenwinkel $=S$, so wie die Höhe der Sonne $=H$, so ist, wenn durch π das bekannte Kreisverhältniss 3,14159.... bezeichnet wird,

$$ZL=\frac{\pi}{2}-H;\ ZP=\frac{\pi}{2}-\beta;\ PL=\frac{\pi}{2}-\delta \text{ und } ZPL=S;$$

folglich

$$1) \qquad \sin H=\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos S.$$

Bezeichnet man die Zeit mit t, so ist der Zeitmoment dt, und die in einem Augenblick von der Flächeneinheit in Empfang genommene Wärme- oder Lichtmenge

$$=dt.\sin H;$$

folglich hat man, wenn man die Wärme- oder Lichtmenge eines Tages mit M bezeichnet,

$$M=\int dt(\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos S),$$

wofern dieses Integral zwischen den gehörigen Grenzen genommen wird.

Zur Zeiteinheit nehmen wir die bürgerliche Stunde, und dann ist

$$S:t=2\pi:24,$$

folglich

$$t = \frac{12S}{\pi} \text{ und } dt = \frac{12dS}{\pi}.$$

Diess gibt

$$L = \frac{12}{\pi} \int dS (\sin\delta \sin\beta + \cos\delta \cos\beta \cos S).$$

Zwar ist auch die Declination δ eine Function von t, und folglich auch von S; allein sie variirt in einem Tage so wenig, dass das tägliche Wachsthum derselben auf das Integral keinen merklichen Einfluss ausübt. Nehmen wir jedoch für den Tag, dessen Wärme- und Lichtmenge bestimmt werden soll, die Mittags 12 Uhr stattfindende Declination als constant an, so wird man für den einen halben Tag etwas zu viel, für den andern etwas zu wenig Wärme- oder Lichtmenge haben, so, dass beide Fehler sich beinahe neutralisiren werden. — Somit bekommen wir

$$2) \qquad M = \frac{12}{\pi} (\sin\delta \sin\beta . S + \cos\delta \cos\beta \sin S) + C,$$

wo C die eingegangene Constante ist.

Fassen wir zuerst nur den halben Tag ins Auge, so ist für die eine Grenze dieses Integrals $S = 0$, und die andere ergibt sich aus 1), wenn man $H = 0$ setzt. Sie ist

$$\cos S = -\text{tg}\delta \text{tg}\beta \text{ oder } S = \frac{1}{\cos} (-\text{tg}\delta \text{tg}\beta).$$

Nehmen wir dasselbe zwischen diesen Grenzen, verdoppeln es hierauf, setzen $\frac{\pi M}{24} = u$ und behalten S als Hilfsgrösse bei, so haben wir

$$3) \qquad u = \sin\delta \sin\beta . S + \cos\delta \cos\beta \sin S.$$

In Betreff derjenigen Gegenden aber, wo die Sonne gar nicht mehr untergeht, hat man das Integral 2) für einen ganzen Tag, oder vielmehr für die zwischen zwei aufeinanderfolgende tiefste Standpunkte der Sonne fallende Zeit von 24 Stunden, d. i. zwischen den Grenzen $S = 0$ und $S = \pi$ zu nehmen und hernach zu verdoppeln. Diess gibt

$$4) \qquad M = 24 \sin\delta \sin\beta.$$

Man kann nun die Frage aufwerfen: In welcher Breite findet, bei gegebener Declination der Sonne, ein Maximum oder Minimum der in einem Tage gelieferten Wärme- und Lichtmenge statt? Zu diesem Zweck setzen wir die in Beziehung auf β genommenen

Differentiale von 3) und 4) gleich Null und entwickeln β. 3) gibt zuerst

$$du_{\beta}=\sin\delta\cos\beta . S+\sin\delta\sin\beta dS_{\beta}-\cos\delta\sin\beta\sin S+\cos\delta\cos\beta\cos S dS_{\beta}.$$

Substituiren wir für $\cos S$ dessen Werth, so heben sich auf der rechten Seite dieser Gleichung das zweite und vierte Glied gegenseitig auf, und es ist alsdann

$$du_{\beta}=\sin\delta\cos\beta . S-\cos\delta\sin\beta\sin S.$$

Setzen wir nun $du_{\beta}=0$, so kommt, wenn wir $\operatorname{tg}\delta=a$ setzen, nachdem die entstandene Gleichung zuvor mit der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta=-\cos S$$

multiplicirt worden ist,

$$5) \qquad 2Sa^2+\sin 2S=0.$$

Eliminirt man aus 3) und 5) S, so ergibt sich das M. M. selbst

$$u=\frac{\cos\delta}{\cos\beta}\sin S.$$

Ist d^2u_{β} negativ, so findet ein Maximum, und positiv, ein Minimum statt. Es ist aber

$$d^2u_{\beta}=-u+dS_{\beta}(\sin\delta\cos\beta-\cos\delta\sin\beta\cos S)$$

oder, indem sich

$$dS_{\beta}=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin S.\cos\beta}$$

findet, durch Substitution dieses Werthes, so wie desjenigen von u:

$$d^2u_{\beta}=\frac{\sin\delta^2-\cos\delta^2\sin S^2\cos\beta^2}{\cos\delta\sin S\cos\beta^3}.$$

Ist daher der absolute Werth von $\operatorname{tg}\delta \lessgtr \sin S\cos\beta$, so hat man ein Maximum.
Minimum.

Wenn nun S' ein Werth ist, der die Gleichung 5) beinahe befriedigt, so hat man die Correction

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{2S'a^2+\sin 2S'}{a^2+\cos 2S'}.$$

Setzen wir $y=2Sa^2+\sin 2S$, so ist

$$\text{für } S=0 \ \ldots\ldots\ y=0,$$

$$,,\ S=\frac{\pi}{2}\ \ldots\ldots\ y=\pi a^2,$$

$$,,\ S=\frac{3\pi}{4}\ \ldots\ldots\ y=\frac{3}{2}\pi a^2-1.$$

$$,,\ S=\pi\ \ldots\ldots\ y=2\pi a^2.$$

Im Uebrigen bemerkt man

1) dass für alle Werthe von S zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ jede der Grössen $2Sa^2$ und $\sin 2S$ positiv bleibt, so dass y positiv ist;

2) dass zwischen $S=\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ die Grösse $2Sa^2$ zwar immer noch stetig wächst, allein $\sin 2S$ von Null an stetig abnimmt, so dass, wenn einmal y negativ geworden ist, dasselbe auch negativ bleibt, bis auf den Werth $S=\frac{3\pi}{4}$. In der That ist auch für den letztern Werth von $S \ldots y=\frac{3}{2}\pi a^2-1$ negativ, selbst für den grössten Werth, den man a beilegen kann, nemlich für

$$a=\operatorname{tg}23^{0}28'=0{,}434\ldots;$$

3) dass gleicher Weise zwischen $S=\frac{3}{4}\pi$ und π wieder jede jener Grössen wächst, und dass demnach auch y positiv bleibt, wenn es solches einmal geworden ist. Wirklich geht es in diesen Grenzen auch von der Negativität in die Positivität über. Da wir nun dem Stundenwinkel S keinen grössern Werth beilegen dürfen als π, so folgt daraus, dass y ausser $S=0$ noch zweimal durch Null gehen wird, nemlich

für einen Werth von S zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$, so wie

,, ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{3\pi}{4}$ und π.

Sonach bietet die Gleichung 5) drei, aber auch nicht mehr als drei Werthe für S dar.

Die Gleichung 4) aber gibt

$$dM_\beta = 24\sin\delta\cos\beta = 0,$$

also

$$\beta = 90^0 \text{ und } M = 24\sin\delta.$$

$\beta = 90^0$ gibt aber

$$d^2M_\beta = -24\sin\delta,$$

folglich hat man hier ein Maximum und zwar für den Pol.

Man überzeugt sich daher, dass die tägliche Wärme- oder Lichtmenge vier M. M. darbietet.

Für

$$S = 0 \text{ oder } \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta = -1,$$

d. h. für den Fall, wo die Breite β und die Declination δ der Sonne einander entgegengesetzt sind und sich zu einen Rechten ergänzen, ist aber

$$d^2u_\beta = +\infty, \text{ also } u = 0 \text{ ein Minimum.}$$

Hat man hierauf aus der Gleichung

$$2Sa^2 + \sin 2S = 0$$

noch die zwei übrigen Werthe numerisch bestimmt, so wird man vermittelst der Bedingung

$$\operatorname{tg}\delta \lessgtr \sin S . \cos\beta$$

entscheiden, ob man ein Maximum oder Minimum hat. Diese Entscheidung erledigt sich jedoch einfach durch die Bemerkung, dass die Max. und Min. nur abwechslungsweise auf einander folgen können. Da nun der erste, aus der Gleichung

$$2Sa^2 + \sin 2S = 0$$

gezogene Werth, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$, ein Minimum liefert, so wird der zweite Werth von β ein Maximum und der dritte wieder ein Minimum geben, während vom letzten Werthe für β, nemlich $\beta = 90^0$, bereits bekannt ist, dass er ein Maximum bedingt.

Nimmt man z. B. die grösste Declination der Sonne $\delta = 23^{0}28'$, so ergibt sich ausser $S=0$ auch noch

$$S=1{,}99691\ldots \text{ oder } S=114^{0}25',$$

so wie

$$S=2{,}51708 \text{ oder } S=144^{0}13';$$

$\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\delta = -\cos S$ gibt aber

$$\beta = 43^{0}36' \text{ und } \beta = 61^{0}51',$$

und diess gibt ferner

$$u=1{,}1534 \text{ und } u=1{,}1369.$$

Man hat daher:

1) ein Minimum... $u=0$ oder .... $M=0$ in der Breite $-66^{0}32'$.

2) ein Maximum... $u=1{,}1534$... od. $M=8{,}8112$.. „ $+43^{0}36'$.

3) ein Minimum... $u=1{,}1369$... od. $M=8{,}6851$... „ $+61^{0}50'$.

4) ein Maximum . . . . $M=9{,}5571$... „ $+90^{0}$ od. auf dem Pol.

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung der Wärme- und Lichtmenge für einen grössern Theil des Jahres, oder auch für das ganze Jahr. Allein es wäre sehr umständlich, dieselbe für jeden einzelnen Tag zu berechnen, und zuletzt alle zu summiren. Diesen Zweck erreichen wir weit schneller durch die Differenzen-Rechnung.

Es ist hier völlig genügend, uns die Erdbahn kreisförmig und die Sonne im Mittelpunkt befindlich vorzustellen, so dass dieselbe in ihrer Länge täglich um denselben Bogen fortschreitet und alle bürgerlichen Tage einander gleich sind. Diese Annahme können wir um so eher machen, als physikalische oder örtliche Ursachen noch weit bedeutendere Modificationen eintreten lassen.

Die Länge der Sonne bezeichnen wir mit λ und deren tägliches Wachsthum mit h. Unsere Summationen aber können wir in Beziehung auf den Variablen λ und dessen constantes Wachsthum h durchführen, während λ an die Gleichung gebunden ist

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda,$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet.

Wir sind nun genöthigt, die Formeln 3) und 4) so umzuformen, dass eine Integration in Beziehung auf λ möglich ist. Diess lässt sich in Beziehung auf 3) nur durch eine unendliche Reihe bewerkstelligen.

Setzen wir

$$\frac{u}{\sin\beta} = U \text{ und } \mathrm{tg}\beta = z;$$

so haben wir aus 3)

$$U = \sin\delta \, . \, S + \frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z} \, .$$

Hiervon ist das Differential in Beziehung auf z

$$d\,U_z = \sin\delta . dS_2 - \frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z^2} + \frac{\cos\delta . \cos S . dS_z}{z} \, .$$

Eliminiren wir $\cos S$ vermittelst des Werthes $-z\mathrm{tg}\delta$, so ist

$$d\,U_z = -\frac{\cos\delta \, . \, \sin S}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\sqrt{1 - \sin\delta^2 . (1+z^2)}$$

oder

$$d\,U_z = -\frac{1}{z^2}(1 - c \, . \, \sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

wenn wir

$$\sin\varepsilon^2(1+z^2) = c$$

setzen.

Nun könnten wir die Wurzelgrösse $(1 - c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, und hierauf die Potenzen von $\sin\lambda$ in die Sinus und Cosinus von λ und dessen Vielfachen verwandeln. Diesen Zweck können wir jedoch unmittelbar erreichen, und da nur gerade Potenzen von $\sin\lambda$ zum Vorschein kommen, und diese keine Sinus, sondern nur Cosinus erzeugen, so setzen wir

$$(1 - c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = a_0 + a_1\cos\lambda + a_2\cos 2\lambda + a_3\cos 3\lambda + \ldots\ldots a_n\cos n\lambda .$$

Nimmt man die Differentiale der Logarithmen beider Seiten in Beziehung auf λ, so kommt

$$\frac{c.\sin 2\lambda}{(2-c)+c.\cos 2\lambda}$$
$$=\frac{a_1\sin\lambda+2a_2\sin 2\lambda+3a_3\sin 3\lambda\,.....+na_n\sin n\lambda}{a_0+a_1\cos\lambda+a_2\cos 2\lambda+a_3\cos 3\lambda\,....+a_n\cos n\lambda}.$$

Da im Allgemeinen ist

$$\sin A.\cos B=\frac{1}{2}\sin(A+B)+\frac{1}{2}\sin(A-B),$$

so hat man, wenn man die Nenner wegschafft, als Coefficient von $\sin n\lambda$:

$$\frac{1}{2}ca_{n-2}-\frac{1}{2}ca_{n+2}-(2-c)na_n-\frac{1}{2}(n-2)ca_{n-2}-\frac{1}{2}(n+c)ca_{n+2}.$$

Setzen wir diesen Coefficienten gleich Null, und ersetzen n durch $n-2$, so entwickelt sich

$$6)\qquad a_n=\frac{5-n}{1+n}a_{n-4}+\frac{2(n-2)}{1+n}\left(1-\frac{2}{c}\right)a_{n-2}.$$

Setzt man

$$(1-c.\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}=\left[1+\frac{c}{4}\left(e^{\lambda\sqrt{-1}}-e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

so überzeugt man sich, dass bei der binomischen Entwicklung λ in der Potenz $e^{\pm\lambda\sqrt{-1}}$ stets nur in Begleitung eines geraden Coefficienten erscheint, so dass sich die Coefficienten a_n mit ungeradem Stellenzeiger als Null ausweisen. Alle Coefficienten a_n bestimmen sich daher in a_0 und a_2, welche letzteren unmittelbar zu entwickeln sind.

a_0 ist, nebst 1, der Inbegriff aller der Grössen, welche in den Potenzen $(e^{\lambda\sqrt{-1}}-e^{-\lambda\sqrt{-1}})^{2m}$ das mittlere Glied ausmachen; und ebenso ist $\frac{1}{2}a_2$ die Summe aller derjenigen Coefficienten, die jenem mittlern Gliede unmittelbar vorangehen oder auch nachfolgen, d. h. der Coefficienten der Grösse

$$e^{2\lambda\sqrt{-1}}+e^{-2\lambda\sqrt{-1}}.$$

Auf diese Weise findet sich:

$$a_0 = 1 - 2\frac{c}{8} - 4.3.\frac{1.1}{(1.2)^2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 - 6.5.4\frac{1.1.3}{(1.2.3)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^3$$

$$-8.7.6.5.\frac{1.1.3.5}{(1.2.3.4)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^2 \ldots\ldots$$

$$-2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1).\frac{1.1.3.5\ldots.(2m-3)}{(1.2.3\ldots.m)^2}\cdot\left(\frac{c}{8}\right)^m,$$

$$\frac{1}{2}a_2 = \frac{c}{8} + 4.\frac{1.1}{1.2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{c}{8}\right)^4 \ldots.$$

$$+\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots.(m+2)}{1.2.3\ldots.(m-1)}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots.(2m-3)}{1.2.3\ldots m}\left(\frac{c}{8}\right)^m.$$

Vermehre ich jede dieser Reihen um ein Glied, indem ich das neue Glied aus dem letzten durch Verwandlung des m in $m+1$ gewinne, und dividire hierauf das letzte durch das uneinsletzte, so finde ich für die Verhältnisse zweier aufeinander folgender Glieder:

$$c.\frac{4m^2-1}{4(m+1)^2}$$

und

$$c.\frac{4m^2-1}{4m(m+2)}.$$

Beide Verhältnisse sind kleiner als c, nähern sich aber dieser Grösse desto mehr, je grösser m wird, und gehen nur für $m=\infty$ in c über. Die Convergenz beider Reihen ist daher gesichert, sobald $c<1$, d. h. wenn

$$\sin\varepsilon^2.(1+\mathrm{tg}\beta^2)<1, \text{ oder } \sin\varepsilon<\cos\beta,$$

mit Worten, wenn die Breite den Polarkreis nicht erreicht.

Um jedoch auf u zurückzukommen, muss dU_z in Beziehung auf z integrirt werden, und es fragt sich, ob obige Reihen auch bei dieser Sachlage noch als brauchbar sich zeigen.

Wir haben daher zu vergleichen

$$\frac{c^m}{z^2} \text{ mit } \int\frac{c^m\,dz}{z^2},$$

oder bei Vernachlässigung des gemeinschaftlichen Coefficienten $\sin\varepsilon^{2m}$:

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \text{ mit } \int\frac{(1+z^2)^m}{z^2}dz.$$

Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} = \frac{1}{z^2} + m + \frac{m(m+1)}{1.2} . z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^4 + \ldots,$$

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} dz$$

$$= -\frac{1}{z} + mz + \frac{m(m+1)}{1.2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot \frac{z^5}{5} + \ldots$$

z mag positiv oder negativ sein, so ist für alle Werthe von $z \leqq 1$ jedes Glied der obern Reihe grösser, als jedes Glied von derselben Ordnung in der untern Reihe, mit Ausnahme des Falles $z=1$, wo die absoluten Werthe der zwei ersten Glieder einander gleich sind, nemlich $=1$. Es ist daher um so mehr,

$$\int \frac{c^m dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2},$$

als das Integral eine Differenz kleinerer Grössen vorstellt, während $\frac{c^m}{z^2}$ eine Summe grösserer Glieder ist.

Für z positiv und >1 ist $\int \frac{(1+z^2) dz}{z^2}$ stets positiv, und

für z negativ und >1, „ „ „ negativ,

mit dem einzigen Ausnahmefall $m=0$. Es ist aber

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2} dz$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + m(1-z) + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 (1 - \frac{z}{3})$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^4 (1 - \frac{z}{5}) + \ldots$$

wo das negative Zeichen für das positive z und das positive für das negative z gilt.

z mag so gross sein, als es will, kann man doch stets m einen Werth beilegen, der diese Differenz (Summe) positiv macht, so dass jedenfalls in der Entwicklung von U die später folgenden Glieder bewirken, dass

$$\int \frac{c^m dz}{z^2} < \frac{c^m}{z^2}$$

wird.

Um diesen Umstand herbeizuführen, hat man nicht einmal nöthig, auf einen hohen Werth von m anzusteigen, denn wir haben uns bereits überzeugt, dass Convergenz nur dann erreicht wird, wenn

$$\cos\beta > \sin\varepsilon,$$

welches gleich ist mit

$$z < \operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Nun ist

$$\operatorname{cotg}\varepsilon = 2,3035\ldots..$$

und da z nicht einmal diese Grösse erreichen darf, so zeigt sich in obiger Reihe für

$$\frac{(1+z^2)^m}{z^2} \mp \int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}$$

höchstens das dritte Glied als negativ, so dass schon der Werth $m=3$ diese Differenz positiv macht.

Die Reihe für U oder u zeigt sich daher noch brauchbarer als die für dU_z.

In Beziehung auf die Anwendung der Formel 6) zur Bestimmung des Coefficienten a_4 ist zu bemerken, dass das erste Glied in der Entwicklung von $(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ den übrigen conform sein muss, d. h. es muss die Form haben $\nu\cos o\lambda$ oder $\nu\cos o$. Soll aber die Grösse $e^{n\sqrt{-1}}+e^{-n\sqrt{-1}}$ einen Cosinus darstellen, so muss ihm ein Zweier als Nenner untersetzt werden, woraus folgt, dass der Coefficient a_n stets der gedoppelte Coefficient von

$$e^{n\lambda\sqrt{-1}} + e^{-n\lambda\sqrt{-1}}$$

in der Entwicklung für

$$\left[1+\frac{c}{4}\left(e^{n\lambda\sqrt{-1}}+e^{-n\lambda\sqrt{-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Die Grenze des Verlustes, bei beliebiger Abbrechung unserer Reihe

a) $\quad a_0 + a_2\cos 2\lambda + a_4\cos 4\lambda \ldots. + a_{2n}\cos 2n\lambda$

lässt sich am Einfachsten dadurch bestimmen, dass wir das Binomium $(1-c\sin\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ unmittelbar entwickeln, wodurch wir erhalten

$$\text{b)}\qquad 1-\frac{1}{2}c\sin\lambda^2-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.1}{1.2}c^2\sin\lambda^4-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.1.3}{1.2.3}c^3\sin\lambda^6\ldots.$$

$$\ldots.-\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots(2m-3)}{1.2.3\ldots.m}c^m\sin\lambda^{2m}.$$

Die Reihe a) geht aus der Reihe b) hervor, wenn die verschiedenen Potenzen von $\sin\lambda$ in Sinus von λ und dessen Vielfachen verwandelt werden. Es ist auch bekannt, dass der höchste vielfache Bogen in den Verwandlungen von $\sin\lambda^{2m}$ der $2m$fache $(2m\lambda)$ ist, woraus folgt, dass, wenn man in b) mit dem Gliede

$$\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots..(2m-3)}{1.2.3\ldots.m}c^m\sin\lambda^{2m}$$

abbricht, in a) keine höhern Potenzen von c erscheinen werden, als c^m, und dass demnach, wenn man $n=m$ macht, und in den Coefficienten

$$a_0,\; a_2,\; a_4\ldots..a_{2n}$$

die Potenzen von c nur bis auf c^n ansteigen lässt, in a) auch kein einziges Glied verloren gegangen sein wird, so dass beide Reihen vollständig den gleichen Werth haben werden.

Lässt man nun in b) m um die Einheit wachsen, so erhält man dadurch das $(m+2)$te Glied, und dividirt man diess durch das $(m+1)$ste, so ist das Verhältniss derselben

$$\frac{2m-1}{2m+2}c\sin\lambda^2.$$

Der Coefficient $\frac{2m-1}{2m+2}c$ ist stets kleiner als c und nähert sich bloss der Grösse c, wenn m wächst. Es ist also auch diese Reihe convergent, sobald $c<1$.

Die Summe der geometrischen Progression

$$a+ae+ae^2+\ldots.ae^{n+1}$$

aber ist

$$s = a . \frac{e^n - 1}{e - 1} .$$

Lässt man jedoch die Reihe mit dem Gliede e^m beginnen, so setze man nur $a = e^m$ und dann hat man

$$s = e^m . \frac{e^n - 1}{e - 1} .$$

Ist e ein Bruch, und gleich $\frac{p}{q}$, so gibt diess für $n = \infty$

$$s = \frac{p}{q - p} \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} ,$$

woraus folgt, dass die Summe der nachfolgenden Glieder gleich ist dem $\frac{p}{q-p}$ fachen des vorangegangenen Gliedes. Sind jedoch die Glieder der Progression noch mit fallenden Coefficienten begleitet, wie diess wirklich in b) der Fall ist, wo c für $\frac{p}{q}$ steht, so erreicht die Summe der nachfolgenden Glieder nicht einmal das $\frac{p}{q-p}$ fache des vorangegangenen Gliedes.

Hat man sich daher über den Grad der beabsichtigten Schärfe der Rechnung entschieden, so wird man in der Formel b) das Glied bestimmen, mit dem man abzubrechen hat. Ist es das Glied $c^n . \sin\lambda^{2n}$, so wird man auch nur die Coefficienten a bis a_{2n} berechnen, in denselben c bloss bis auf die Potenz c^n steigen lassen und mit dem Gliede $a_{2n} \cos 2n\lambda$ endigen. So wird man endlich haben

$$U = -\int \frac{a_0 + a_2 \cos 2\lambda + a_4 \cos 4\lambda \ldots\ldots + a_{2n} \cos 2n\lambda}{z^2} dz + C,$$

wo C die durch die Integration eingegangene Constante ist, welche im Allgemeinen eine Function von λ sein wird. Um diese Constante zu bestimmen, gehen wir zurück auf die Gleichung

$$d\, U_z = - \frac{\cos\delta . \sin S}{z^2} ,$$

deren Integral

$$U = -\int \frac{\cos\delta.\sin S}{z^2} dz + C$$

kein anderes ist, als das obige. Demnach ist

$$-\int \frac{\cos\delta.\sin S}{z^2} dz + C = \sin\delta.S + \frac{\cos\delta.\sin S}{z}.$$

Integriren wir per partes, so heben sich $\frac{\cos\delta.\sin S}{z}$ gegenseitig auf, und es ist

$$-\int \frac{dz}{z} \cdot \cos\delta.\cos S dS_z + C = \sin\delta.S \cdot$$

Ersetze ich $\cos S$ durch $-z.\mathrm{tg}\delta$, so ist

$$\int \sin\delta dz dS_z + C = \sin\delta.S$$

oder

$$\sin\delta.S + C = \sin\delta.S,$$

folglich $C=0$. Somit haben wir

$$7) \quad u = -\sin\beta \int \frac{a_0 + a_2\cos 2\lambda + a_4\cos 4\lambda \ldots + a_{2n}\cos 2n\lambda}{z^2} dz.$$

Setze ich nun

$$-\sin\beta \int \frac{a_0 dz}{z^2} = A_0,$$

$$-\sin\beta \int \frac{a_2 dz}{z^2} = A_2,$$

. . . .

. . . .

$$-\sin\beta \int \frac{a_{2n} dz}{z^2} = A_{2n};$$

so kommt

8) $$u = A_0 + A_2\cos 2\lambda \ldots\ldots A_{2n}\cos 2n\lambda.$$

Von den Integralen

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz:$$

lässt sich leicht das nachfolgende durch das vorhergehende be stimmen. Man hat nemlich zuerst

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = \int \frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2}\,dz + \int (1+z^2)^{m-1}\,dz,$$

und hierauf

$$\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = -\frac{(1+z^2)^m}{z} + 2m\int (1+z^2)^{m-1}\,dz.$$

Eliminire ich nun

$$\int (1+z^2)^{m-1}dz,$$

so kommt

$$(2m-1)\int \frac{(1+z^2)^m}{z^2}\,dz = \frac{(1+z^2)^m}{z} + 2m\int \frac{(1+z^2)^{m-1}}{z^2}\,dz.$$

Setze ich nun

$$\sin\beta \int \frac{dz}{z^2} = A_0,$$

$$\sin\beta \int \frac{dz\,(1+z^2)}{z^2} = A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\beta \int \frac{dz(1+z^2)^r}{z^2} = A_r;$$

so ist

$$A_0 = -\cos\beta,$$

$$A_1 = \sec\beta + 2A_0,$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(\sec\beta^3 + 4A_1),$$

$$A_3 = \frac{1}{5}(\sec\beta^5 + 6A_2),$$

. . . .

$$A_r = \frac{1}{2r-1}(\sec\beta^{2r-1} + 2rA_{r-1}).$$

Um nun in den Entwicklungen von a_4, a_6, a_8.... die Coefficienten von $\frac{c}{8}$ zu bestimmen, setzen wir

$$a_0 = 1 + \overset{(1)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right) + \alpha_0\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_0}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_2 = \overset{(1)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right) + \overset{(2)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_2}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_4 = \overset{(2)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^2 + \overset{(3)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_4}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$a_6 = \overset{(3)}{\alpha_6}\left(\frac{c}{8}\right)^3 + \overset{(4)}{\alpha_6}\left(\frac{c}{8}\right)^4 + \ldots\ldots$$

. . . .

und dann hat man

$$A_0 = -A_0 - \overset{(1)}{\alpha_0} A_1 \frac{\sin\varepsilon^2}{8} - \overset{(2}{\alpha_0} A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_0} A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \ldots.$$

$$A_2 = -\overset{(1)}{\alpha_2} A_1 \frac{\sin\varepsilon^2}{8} - \overset{(2)}{\alpha_2} A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_2} A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \ldots.$$

$$A_4 = -\overset{(2)}{\alpha_4} A_2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \overset{(3)}{\alpha_4} A_3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3 - \overset{(4)}{\alpha_4} A_4\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^4 - \ldots.$$

. . . .

Nun gibt die Formel

$$a_n = \frac{5-n}{1+n} a_{n-4} + \frac{2(n-2)}{1+n} \left(1 - \frac{2}{c}\right) a_{n-2}$$

nach einander:

$$a_4 = \frac{1}{5} (a_0 + 4a_2 - \frac{8}{c} a_2),$$

$$a_6 = \frac{1}{7} (-a_2 + 8a_4 - 2 \cdot \frac{8}{c} a_4),$$

$$a_8 = \frac{1}{9} (-3a_4 + 12a_6 - 3 . \frac{8}{c} a_6),$$

$$a_{10} = \frac{1}{11} (-5a_6 + 16a_8 - 4 . \frac{8}{c} a_8),$$

. . . .

Macht man nun die gehörigen Substitutionen und vergleicht die Coefficienten derselben Potenzen von $\frac{c}{8}$, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_4^{(2)} &= \frac{1}{5} (\alpha_0^{(2)} + 4\alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(3)}) \\ \alpha_4^{(3)} &= \frac{1}{5} (\alpha_0^{(3)} + \alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(4)}) \\ \alpha_4^{(4)} &= \frac{1}{5} (\alpha_0^{(4)} + 4\alpha_2^{(4)} - \alpha_2^{(5)}) \end{aligned}\right\}$$ wo für alle α_0 deren doppelter Werth zu nehmen ist.

. . . .

$$\alpha_6^{(3)} = \frac{1}{7} (-\alpha_2^{(3)} + 8\alpha_4^{(3)} - 2\alpha_4^{(4)})$$

$$\alpha_6^{(4)} = \frac{1}{7} (-\alpha_2^{(4)} + 8\alpha_4^{(4)} - 2\alpha_4^{(5)})$$

$$\alpha_6^{(5)} = \frac{1}{7} (-\alpha_2^{(5)} + 8\alpha_4^{(5)} - 2\alpha_4^{(6)})$$

. . . .

$$\alpha_8^{(4)} = \frac{1}{9} (-3\alpha_4^{(4)} + 12\alpha_6^{(4)} - 3\alpha_6^{(5)})$$

$$\overset{(5)}{\alpha_8} = \frac{1}{9}(-3\overset{(5)}{\alpha_4} + 12\overset{(5)}{\alpha_6} - 3\overset{(6)}{\alpha_6})$$

. . . .

$$\overset{(5)}{\alpha_{10}} = \frac{1}{11}(-5\overset{(5)}{\alpha_6} + 16\overset{(5)}{\alpha_8} - 4\overset{(6)}{\alpha_8})$$

. . . .

. . . .

Berechnen wir nun α numerisch und stellen die ersten Werthe tabellarisch dar, so haben wir

α_0	α_2	α_4	α_6
$\alpha_0^{(1)} = -2$	$\alpha_2^{(1)} = 2$		
$\alpha_0^{(2)} = -3$	$\alpha_2^{(2)} = 4$	$\alpha_4^{(2)} = -1$	
$\alpha_0^{(3)} = -10$	$\alpha_2^{(3)} = 15$	$\alpha_4^{(3)} = -6$	$\alpha_6^{(3)} = 1$
$\alpha_0^{(4)} = -\frac{175}{4}$	$\alpha_2^{(4)} = 70$	$\alpha_4^{(4)} = -35$	$\alpha_6^{(4)} = 10$
$\alpha_0^{(5)} = -\frac{441}{2}$	$\alpha_2^{(5)} = \frac{735}{2}$	$\alpha_4^{(5)} = -210$	$\alpha_6^{(5)} = \frac{315}{4}$
$\alpha_0^{(6)} = -\frac{4851}{4}$	$\alpha_2^{(6)} = 2079$	$\alpha_4^{(6)} = -\frac{10395}{8}$	$\alpha_6^{(6)} = \frac{1155}{2}$
$\alpha_0^{(7)} = -\frac{14157}{2}$	$\alpha_2^{(7)} = \frac{99099}{8}$	$\alpha_4^{(7)} = -\frac{33033}{4}$	$\alpha_6^{(7)} = \frac{33033}{8}$
$\alpha_0^{(8)} = -\frac{2760615}{64}$	$\alpha_2^{(8)} = \frac{306735}{4}$	$\alpha_4^{(8)} = -\frac{429429}{8}$	$\alpha_6^{(8)} = \frac{117117}{4}$
$\alpha_0^{(9)} = -\frac{8890825}{32}$	$\alpha_2^{(9)} = \frac{15643485}{32}$	$\alpha_4^{(9)} = -\frac{1422135}{4}$	$\alpha_6^{(9)} = \frac{3318315}{16}$
$\alpha_0^{(10)} = -\frac{112285459}{64}$	$\alpha_2^{(10)} = \frac{51038845}{16}$	$\alpha_4^{(10)} = -\frac{153116535}{64}$	$\alpha_6^{(10)} = \frac{1177819[illegible]}{8}$

α_8	α_{10}	α_{12}	α_{14}
$\alpha_8^{(4)} = -\frac{5}{4}$			
$\alpha_8^{(5)} = -\frac{35}{2}$	$\alpha_{10}^{(5)} = \frac{7}{4}$		
$\alpha_8^{(6)} = -\frac{693}{4}$	$\alpha_{10}^{(6)} = \frac{63}{2}$	$\alpha_{12}^{(6)} = -\frac{21}{8}$	
$\alpha_8^{(7)} = -\frac{3003}{2}$	$\alpha_{10}^{(7)} = \frac{3003}{8}$	$\alpha_{12}^{(7)} = -\frac{231}{4}$	$\alpha_{14}^{(7)} = \frac{33}{8}$
$\alpha_8^{(8)} = -\frac{195195}{16}$	$\alpha_{10}^{(8)} = \frac{15015}{4}$	$\alpha_{12}^{(8)} = -\frac{6435}{8}$	$\alpha_{14}^{(8)} = \frac{429}{4}$
$\alpha_8^{(9)} = -\frac{765765}{8}$	$\alpha_{10}^{(9)} = \frac{546975}{16}$	$\alpha_{12}^{(9)} = -\frac{36465}{4}$	$\alpha_{14}^{(9)} = \frac{109395}{64}$
$\alpha_8^{(10)} = -\frac{11778195}{16}$	$\alpha_{10}^{(10)} = \frac{2375639}{8}$	$\alpha_{12}^{(10)} = -\frac{11778195}{128}$	$\alpha_{14}^{(10)} = \frac{692835}{32}$

Die Gleichung 4) aber gibt

$$9)\quad M = 24\sin\beta.\sin\varepsilon.\sin\lambda.$$

Nun ist bekanntlich, wenn man das constante Wachsthum von x durch h darstellt:

$$\left.\begin{aligned} S\cos qx &= \frac{\sin q(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \text{Const.} \\ S\sin qx &= -\frac{\cos q(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \text{Const.} \end{aligned}\right\}$$

wo S das Summirungszeichen vorstellt.

Will man nun die Summen der $n+1$ Glieder

$$\sin qa + \sin q(a+h) + \sin q(a+2h) \ldots + \sin q(a+nh)$$

und

$$\cos qa + \cos q(a+h) + \cos q(a+2h) \ldots + \cos q(a+nh)$$

haben, so hat man obige Integrale zwischen den Grenzen

$$x = a - h \text{ und } x = a + nh$$

zu nehmen, und diess gibt

$$S\sin qx = \frac{\sin q(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}qh(n+1)}{\sin\frac{1}{2}qh},$$

$$S\cos qx = \frac{\cos q(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}qh(n+1)}{\sin\frac{1}{2}qh}.$$

Da das Wachsthum h in unserm vorliegenden Falle die Längenzunahme der Sonne in einem Tage, folglich kaum $= \frac{1}{58}$ ist, so könnten wir bei unserer beabsichtigten Summation in Beziehung auf 8) in den drei oder vier ersten Gliedern $\frac{1}{2}qh$ statt $\sin\frac{1}{2}qh$ setzen. Ist λ die am ersten Tag, Mittags 12 Uhr, stattfindende Sonnenlänge, so haben wir aus 8) für $m+1$ Tage:

$$10)\qquad Su=(m+1)A_0$$
$$+A_2.\frac{\cos 2(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin h(m+1)}{\sin h}$$
$$+A_4.\frac{\cos 4(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin 2h(m+1)}{\sin 2h}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+A_{2n}.\frac{\cos 2n(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin nh(m+1)}{\sin nh}.$$

Eben so liefert 9) für $m+1$ Tage:

$$11)\qquad SM=\frac{48\sin\beta.\sin\varepsilon}{h}.\sin(\lambda'+\frac{1}{2}mh)\sin\frac{1}{2}h(m+1).$$

Die Formel 10) reicht beinahe für die ganze bewohnte Erde aus, während 11) nur für die Polarländer anwendbar ist.

Bestimmen wir nun für die gemässigten und Tropenländer die Wärme- oder Lichtmenge eines ganzen Jahres. Nehmen wir das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen an und wählen die Länge eines solchen Ortes, welcher um Mitternacht sein Frühlingsäquinoctium hat, so fällt dieses Aequinoctium nach einem Jahre auf 6 Uhr Morgens, wo also die zweite Hälfte der Nacht weder Wärme noch Licht liefert. Fiele aber das erste Aequinoctium auf Morgens 6 Uhr, so käme das zweite auf Mittags 12 Uhr, so dass hier $\frac{1}{2}$ Tag weiter in Rechnung zu bringen wäre, und zwar bei der Declination $\delta=0$. Man wird daher nur unbedeutend von der mittlern Wärme- oder Lichtmenge abweichen, wenn man der Summe für 365 Tage, das erste Aequinoctium für Mitternacht angenommen, noch $\frac{1}{4}u$, für $\delta=0$, beisetzt, d. h.

$$\frac{1}{4}u=\frac{1}{4}\cos\beta.$$

Noch einfacher erreichen wir unsern Zweck, wenn wir interpoliren, und setzen

$$h(1+m)=2\pi.$$

Da wir nun haben $\lambda'=\frac{1}{2}h$, so ist

$$\lambda'+\frac{1}{2}mh=\pi$$

und

$$\sin nh(m+1)=0,$$

folglich die Wärme- oder Lichtmenge eines Jahres

$$Su=\frac{2\pi A_0}{h}=365{,}25A_0$$

oder

$$12)\qquad SM=\frac{48}{h}A_0=2790{,}3A_0.$$

Wollen wir die Wärme- oder Lichtmenge eines Jahres für den Aequator bestimmen, so ist $\beta=0$ und

$$A_0=A_1=A_2=A_3=\ldots\ldots A_n=-1,$$

folglich

$$A_0$$

$$=1-2\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)-3\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^2-10\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^3-\frac{175}{4}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{}\right)^4-\frac{441}{8}\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)^5-\ldots$$

Nun ist

$$\log\left(\frac{\sin\varepsilon^2}{8}\right)=0{,}2971462-2$$

und diess gibt

$$A_0=0{,}9591$$

und endlich

$$SM=2676$$

für den Aequator.

Wollen wir die Wärmemenge des Pols suchen, wo $\beta=90°$, so haben wir es hier nur mit einem halben Jahre zu thun, so dass

$$\sin(\lambda'+\frac{1}{2}mh)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

und

$$\sin\frac{1}{2}h(m+1)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

folglich



$$13) \quad SM = \frac{48 \sin\varepsilon}{h} = 1111$$

für den Pol.

Die dem Aequator in einem Jahre zugeführte Wärme- oder Lichtmenge ist also 2, 4 oder $2^2/_5$ mal grösser, als diejenige des Poles.

Die Fruchtbarkeit eines Landes hängt, unter übrigens gleichen Umständen, hauptsächlich von der demselben zugeführten Wärme- und Lichtmenge ab, und wir dürfen bei den in den irdischen Temperaturen stattfindenden engen Grenzen annehmen, dass für dieselben Gewächse, z. B. für dieselbe Getreideart, die Summen der Wirkungen, um sie gedeihen zu lassen und zur Reife zu bringen, gleich sind.

Wir setzen die in Stunden angegebene Zeit des Gedeihens derselben Fruchtgattung für die Breite β gleich t, für die Breite $\beta' = t'$, die von der Sonne in diesen Zeiten gelieferten Wärme- oder Lichtmengen gleich M und M', so wie die Wärmemenge, die der Erdboden selbst je in einer Stunde gibt, respective gleich m und m'. Setzen wir ferner die Wirkung der Mengen-Einheit der Wärme $= 1$ und die Wirkung der Mengen-Einheit des Lichtes gleich w, so haben wir

$$M + mt + wM = M' + m't' + wM'$$

oder

$$M + \frac{m}{1+w} t = M' + \frac{m'}{1+w} t'.$$

Da M, M', t und t' bekannte Grössen sind, so gibt diese Gleichung die zwischen $\frac{m}{1+w}$ und $\frac{m'}{1+w}$ stattfindende Relation an. Wollte man für die Breite β und eine neue Breite β'' eine zweite Gleichung aufstellen, so könnte man $1+c$ eliminiren, und dadurch würde sich eine neue Relation zwischen m, m' und m'' darstellen.

Bei absichtlich angestellten Proben hat es der Mensch in seiner Macht, in Beziehung auf den Boden und dessen Befeuchtung Gleichheit der Umstände herbeizuführen.

Wollen wir endlich die Wärme- und Lichtmenge bestimmen, die die Sonne in der Zeit T dem ganzen Erdballe überhaupt zuführt, so können wir uns, da stets Eine Halbkugel von derselben erleuchtet ist, vorstellen, die Sonne stehe im Zenit eines Pols, während die Erde ruht. Dann ist die dem Element $d\beta d\lambda$ in einer Stunde mitgetheilte Menge

$$= R^2 d\beta d\lambda . \sin\beta,$$

wobei wir einen Ort mit beliebiger Breite β und beliebiger Länge λ gewählt, und den Halbmesser der Erde $=R$ gesetzt haben.

Die dem ganzen Breitenkreise mitgetheilte Menge ist daher

$$=2\pi R^2 d\beta \sin\beta . \cos\beta = \pi R^2 \sin 2\beta d\beta .$$

Die Integration gibt

$$=\pi R^2 (-\frac{1}{2}\cos 2\beta + C),$$

und zwischen den Grenzen $\beta=\frac{\pi}{2}$ und $\beta=0$

$$=R^2\pi,$$

folglich so viel, als ein grösster Durchschnitt der Erde, den die Sonne senkrecht bescheint, empfangen würde.

Diess gibt in der Zeit T

$$=TR^2\pi,$$

was für ein ganzes Jahr liefert

$$365,25.24.R^2\pi = 27539.R^2.$$

XV.

Ueber die von Polaren und Asymptotenchorden umhüllten Curven.

Von
Herrn O. Bermann,
Hülfslehrer am Gymnasium zu Wetzlar.

(Fortsetzung des Aufsatzes in Theil XIV. S. 382.).

I.

Nachdem die Einhüllungscurven betrachtet worden sind, welche durch Verschiebung des Poles in gegebener Bahn entstehen, wenden wir uns zu denen, deren Entstehung durch Aenderungen der Directrix bei unverändertem Pole bedingt wird. Die Aenderungen der Directrix können ihre Form oder ihre Lage modificiren. Bei solchen der letzteren Art lässt sich immer eine Bewegung des Poles bei ruhender Directrix denken, welche dieselbe Curve erzeugen würde; doch nur in wenigen einzelnen Fällen ist es leicht, Ruhe oder Bewegung von Pol auf Directrix und umgekehrt zu übertragen, so z. B. im Falle einer geradlinigen Bewegung, wo die direct entgegengesetzte in derselben geraden Richtung zu substituiren ist. Das Verschieben der Directrix in gerader Richtung ist demnach auf die früheren Betrachtungen zurückgeführt.

Indem wir hier die Aenderungen in der Form der Directrix nicht weiter betrachten, soll bloss eine von den vielen hinsichtlich der Aenderungen zweiter Art möglichen Annahmen hervorgehoben werden, der Fall nämlich, wo sich der Kegelschnitt um seinen Mittelpunkt dreht. Für die Parabel geht diese Drehung in ein Gleiten längs einer Tangente über, was aber, wie schon erwähnt, auf das Frühere reducirt werden kann. Dass eine

concentrische Kreisbewegung des Poles (in entgegengesetzter Richtung) bei ruhender Directrix hier nicht substituirt werden kann, erhellt sogleich bei näherer Betrachtung.

II.

Betrachten wir zuerst die von den Polaren des Poles x', y' eingehüllte Curve. Es wird im Folgenden ein rechtwinkliges Axensystem gedacht, dessen Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Directrix fällt.

Dreht man die Directrix (Ellipse oder Hyperbel) um den Winkel ω, so ist ihre Gleichung offenbar dieselbe, wie die des unverändert liegenden, wenn dieselbe auf Coordinatenaxen bezogen ist, zu denen man durch blosse Drehung der früheren Axen (ohne Verschiebung) um denselben Winkel, aber in entgegengesetzter Richtung, also um $-\omega$ gelangt. Die hier gültigen Transformationsgleichungen sind aber

$$x = x_1 \cos(-\omega) - y_1 \sin(-\omega), \text{ oder } x = y_1 \sin\omega + x_1 \cos\omega,$$
$$y = x_1 \sin(-\omega) + y_1 \cos(-\omega). \qquad y = y_1 \cos\omega - x_1 \sin\omega$$

Gehen wir von der einfachsten Annahme aus, die ursprüngliche Lage der Directrix sei von der Art gewesen, dass ihre Hauptaxen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, als primitive Gleichung

$$1) \qquad a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = a^2 b^2$$

oder

$$y^2 + \beta x^2 + \varepsilon = 0, \text{ wo } \beta = \pm \frac{b^2}{a^2}, \ \varepsilon = -b^2.$$

Durch die angegebene Transformation geht 1) über in

$$2) \ (\cos^2\omega + \beta \sin^2\omega) y^2 - 2(1-\beta) \sin\omega \cos\omega . xy + (\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega) x^2 + \varepsilon = 0,$$

Gleichung des um den Winkel ω gedrehten Kegelschnittes.

Setzt man

$$\cos^2\omega = \frac{1+\cos 2\omega}{2}, \ \sin^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2}, \ 1+\beta = m, \ 1-\beta = n;$$

also

$$\cos^2\omega + \beta \sin^2\omega = \frac{1+\beta+(1-\beta)\cos 2\omega}{2} = \frac{m + n\cos 2\omega}{2},$$

$$\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega = \frac{1+\beta-(1-\beta)\cos 2\omega}{2} = \frac{m - n\cos 2\omega}{2};$$

so resultirt für 2):

$$3)\quad y^2 - \frac{2n\sin2\omega}{m+n\cos2\omega}xy + \frac{m-n\cos2\omega}{m+n\cos2\omega}x^2 + \frac{2\varepsilon}{m+n\cos2\omega} = 0.$$

Für den Kegelschnitt

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

ist aber die Chordale des Poles (x', y'):

$$(y' + \alpha x' + \gamma)y + (\alpha y' + \beta x' + \delta)x + \gamma y' + \delta x' + \varepsilon = 0,$$

und hier ist

$$\alpha: \frac{-n\sin2\omega}{m+n\cos2\omega},\ \beta: \frac{m-n\cos2\omega}{m+n\cos2\omega},\ \gamma=\delta=0,\ \varepsilon: \frac{2\varepsilon}{m+n\cos2\omega}.$$

Also Gleichung der Chordalen des gedachten Kegelschnittes für den Pol x', y':

$$4)\quad \left(y' - \frac{n\sin2\omega}{m+n\cos2\omega}x'\right)y, \\ + \left(\frac{m-n\cos2\omega}{m+n\cos2\omega}x' - \frac{n\sin2\omega}{m+n\cos2\omega}y'\right)x + \frac{2\varepsilon}{m\,2n\cos2\omega} = 0$$

oder

$$5)\quad n\cos2\omega(y'y - x'x) - n\sin2\omega(x'y + y'x) + m(y'y + x'x) + 2\varepsilon = 0.$$

Setzt man also abkürzend

$$y'y - x'x = A,$$
$$x'y + y'x = B,$$
$$y'y + x'x + \frac{2\varepsilon}{m} = C:$$

so hat man:

$$6)\quad nA\cos2\omega - nB\sin2\omega + mC = 0.$$

Die Differenzialgleichung nach ω ist

$$7)\quad B\cos2\omega + A\sin2\omega = 0,$$

$$\cos2\omega = -\frac{A}{B}\sin2\omega.$$

Dies in

$$\cos^2 2\omega + \sin^2 2\omega = 1$$

substituirt, gibt

$$\sin^2 2\omega\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right)=1,$$

$$\sin 2\omega=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{also}\ \cos 2\omega=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Dies in 6) substituirt, gibt

$$\frac{nA^2}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{nB^2}{\sqrt{A^2+B^2}}-mC=0$$

oder

$$n\sqrt{A^2+B^2}=mC,$$

quadrirt:

$$n^2(A^2+B^2)=m^2C^2,$$

woraus sich endlich für die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve ergibt:

$$8)\quad n^2(A^2+B^2)-m^2C^2=0.$$

III.

Betrachten wir diese Curve näher.

$B=0$ oder $x'y+y'x=0$ ist die Chordale des Systems (als Kegelschnitt betrachtet) der beiden Coordinatenaxen selbst, d. h. die durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Linie, welche parallel der zweiten (nicht durch den Pol gehenden) Diagonale des für den Pol x', y' construirten Coordinaten-Rechtecks ist;

$$A=0\ \text{oder}\ y'y-x'x=0$$

schneidet die vorige im Mittelpunkte der Directrix rechtwinklig, und

$$C=0\ \text{oder}\ y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

ist die Chordale des mit dem gegebenen Kegelschnitte concentrischen Kreises vom Radius

$$\sqrt{\frac{-2\varepsilon}{m}} \text{ oder } ab\sqrt{\frac{2}{a^2 \pm b^2}}.$$

Es liegt der Gedanke einer Vereinfachung unserer Curve dadurch, dass man die auf einander senkrechten $A=0$ und $B=0$ zu neuen Coordinatenaxen nähme, nahe; doch genügen die alten Coordinaten in dieser Hinsicht eben so gut. Es ist nämlich

$$A^2 + B^2 = (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2),$$

und Gleichung 8) reducirt sich auf

$$9) \quad x^2 + y^2 - \frac{m^2}{n^2(x'^2 + y'^2)}\left(y'y + x'x + \frac{2\varepsilon}{m}\right)^2 = 0 \;*.$$

Gleichung 8) lässt sich schreiben:

$$(nA + mC)(nA - mC) + n^2B^2 = 0$$

und

$$(nB + mC)(nB - mC) + n^2A^2 = 0,$$

d. h. der Einhüllungs-Kegelschnitt ist in ein gegebenes Viereck so eingeschrieben, dass auch die vier Berührungspunkte angegeben sind, und demnach leicht zu construiren.

Es erhellt nämlich aus der ersten dieser Gleichungen, dass, weil dieselbe befriedigt wird, wenn gleichzeitig

$$\left.\begin{matrix} nA + mC = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left.\begin{matrix} nA - mC = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\}$$

ist, derselbe durch die Punkte geht, wo die Linie $B=0$ die beiden Geraden

$$nA + mC = 0 \text{ und } nA - mC = 0$$

schneidet, und ferner, weil B in quadratischer Form erscheint, dass jeder dieser Durchschnittspunkte als das Zusammenfallen

---

*) Führt man jene Transformation aus, indem man $B=0$ als neue Axe der x, $A=0$ als neue Axe der y annimmt, so resultirt. wenn man auch den Pol auf die neuen Axen bezieht und daher $2x'y' = x''$, $y'^2 - x'^2 = y''$ setzt, wo x'', y'' dann die neuen Coordinaten desselben sind:

$$m^2x^2 + n^2y^2 - \frac{m^2}{x''^2 + y''^2}\left(y''y + x''x + \frac{2\varepsilon\sqrt{x''^2 + y''^2}}{m}\right)^2 = 0,$$

eine nicht so einfache Gleichung.

zweier Punkte vertretend anzusehen ist, d. h. dass jene beiden Geraden Tangenten sind. Ebenso geht aus der Gleichung hervor, dass die beiden Geraden

$$nB + mC = 0 \text{ und } nB - mC = 0$$

den Kegelschnitt da tangiren, wo sie von $A = 0$ geschnitten werden.

Es ist

$$nA + mC = 0: \ (1-\beta)(y'y - x'x) + (1+\beta)(y'y + x'x) + 2\varepsilon = 0$$

oder

$$y'y + \beta x'x + \varepsilon = 0,$$

so wie

$$nA - mC = 0: \ x'x + \beta y'y + \varepsilon = 0;$$

erstere nichts anderes, als die Chordale der Directrix in ihrer primitiven Lage, letztere dasselbe für den (reciproken) Pol, dessen Abscisse der Ordinate des gegebenen gleich ist, und umgekehrt.

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte, resp. Tangentialpunkte, sind, wie sich durch Elimination einer der Variabeln aus den betreffenden Gleichungen unmittelbar ergibt:

von $B = 0$ mit $nA + mC = 0$: $x = \frac{\varepsilon x'}{\beta x'^2 - y'^2}$, $y = \frac{-\varepsilon y'}{\beta x'^2 - y'^2}$;

- - - $nA - mC = 0$: $x = \frac{\varepsilon x'}{x'^2 - \beta y'^2}$, $y = \frac{\varepsilon y'}{\beta y'^2 - x'^2}$.

$$nB + mC = 0 \text{ ist } (nx' + my')y + (mx' + ny')x + 2\varepsilon = 0$$

oder

$$(x' + y')(x + y) + \beta(x' - y')(x - y) + 2\varepsilon = 0$$

oder auch

$$B + C - \beta(B - C) = 0.$$

$$nB - mC = 0 \text{ ist } (nx' - my')y + (mx' - ny')x - 2\varepsilon = 0$$

oder

$$(x' - y')(x + y) + \beta(x' + y')(x - y) - 2\varepsilon = 0$$

oder auch

$$B - C - \beta(B + C) = 0.$$

$$B-C=0 \text{ und } B+C=0$$

sind die Halbirungslinien der Winkel, welche die $B=0$ und $C=0$ mit einander bilden (und daher auch auf einander senkrecht), und auch dadurch näher bestimmt, dass sie unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigt sind, weil

$$B-C=0 \text{ oder } (x'-y')y+(y'-x')x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

identisch mit

$$y-x+\frac{2\varepsilon}{m(x'-y')}=0$$

und

$$B+C=0 \text{ oder } (x'+y')y+(x'+y')x+\frac{2\varepsilon}{m}=0$$

identisch mit

$$y+x+\frac{2\varepsilon}{m(x'+y')}=0$$

ist; die Entfernungen beider vom Anfangspunkte sind offenbar

$$\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{m(x'+y')} \text{ und } \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{m(x'-y')}.$$

Gegen die eine dieser leicht zu construirenden Linien, gegen $B-C=0$ nämlich, ist die Gerade $nB+mC=0$ unter demselben Winkel, dessen trigonometrische Tangente β oder $\pm\frac{b^2}{a^2}$ ist, geneigt, wie $nB-mC=0$ gegen die andere, $B+C=0$.

Als Coordinaten der beiden hierher gehörigen Durchschnittspunkte, resp. Tangentialpunkte, ergeben sich:

für den von $A=0$ mit $nB+mC=0$: $x=\dfrac{-2\varepsilon y'}{n(x'^2+y'^2)+2mx'y'}$,

$$y=\frac{-2\varepsilon x'}{n(x'^2+y'^2)+2mx'y'};$$

. . . . . $nB-mC=0$: $x=\dfrac{2\varepsilon y'}{n(x'^2-y'^2)}$,

$$y=\frac{2\varepsilon x'}{n(x'^2-y'^2)}.$$

Das dem Kegelschnitte zugehörige Viereck (er mag es von Innen oder Aussen berühren) ist demnach leicht zu construiren:

Man hat zuerst für die Directrix die Chordale des gegebenen P und die des reciproken Pols (p) zu ziehen, sodann zwei Linien, welche gegen die beiden unter 45^0 in sich entgegenstehender Richtung und in gegebener Entfernung vom Anfangspunkte laufenden Geraden unter einem gegebenen Winkel geneigt sind und durch die Punkte gehen, wo letztere sich schneiden — Hierauf lassen sich auch auf diesen, ein Viereck bildenden Geraden, die Tangentialpunkte in folgender Weise bestimmen: Für das erste Paar merke man sich die Punkte, wo es von einer durch den Mittelpunkt der Directrix gehenden, der zweiten Diagonale des für den Pol construirten Coordinaten-Rechtecks parallelen, für das zweite, wo es von der auf letzterer Linie im Mittelpunkte der Directrix senkrechten Geraden geschnitten wird.

IV.

Ist die Directrix ein Kreis $(a=b=r)$, also

$$\beta=1,\ \varepsilon=-r^2,\ n=0,\ m=2;$$

so reducirt sich die Umhüllungscurve auf

$$C=0 \text{ oder } y'y+x'x=r^2,$$

d. h., wie natürlich, auf die Chordale dieses Kreises, weil in diesem Falle die Drehung keine Aenderung bewirkt.

Für die gleichseitige Hyperbel ist

$$\beta=-1,\ \varepsilon=-r^2,\ n=2,\ m=0.$$

Die Curvengleichung 9) reducirt sich in diesem Falle auf

$$x^2+y^2=\frac{\varepsilon^2}{x'^2+y'^2},$$

d. h. auf einen der Directrix concentrischen Kreis vom Radius $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{x'+y'^2}}$ oder $\frac{r^2}{d}$, wenn d die Entfernung des Poles vom Mittelpunkte der Directrix bezeichnet. Dieser Kreis ändert sich für dieselbe gleichseitige Hyperbel offenbar nur mit der Entfernung des Poles und wird um so kleiner, je weiter derselbe wegliegt. Wenn sich daher während der Drehung der gleichseitigen Hyperbel der Pol auf einem derselben concentrischen Kreise bewegt, so hat dies auf die Umhüllungscurve keinen Einfluss.

Der Fall, wo die Directrix in ein System zweier Geraden übergeht, kann nicht betrachtet werden, weil Gleichung 1) denselben nicht umfasst. Doch ist es von selbst klar, dass, weil alle Chordalen durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden gehen, hier der Mittelpunkt Umhüllungscurve ist.

Die Umhüllungscurve ist eine Ellipse, wenn die Directrix eine Hyperbel ist und umgekehrt. Löst man nämlich Gleichung 9) auf, so ergibt sich nach einigen Reductionen:

$$10)\quad y^2-\frac{2(1+\beta)^2x'y'}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}xy$$

$$+\frac{(1-\beta)^2y'^2-4\beta x'^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}x^2-\frac{4(1+\beta)\varepsilon}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}(y'y+x'x)-\frac{4\varepsilon^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2}=0.$$

Was für die allgemeine Kegelschnittsgleichung $\alpha^2-\beta$, das ist für unsere Curve

$$\frac{(1+\beta)^4x'^2y'^2}{[(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2]^2}-\frac{(1-\beta)^2y'^2-4\beta x'^2}{(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2},$$

was sich, auf denselben Nenner gebracht, auf

$$4\beta.\frac{(1-\beta)^2y'^2(x'^2+y'^2)+(1+\beta)^2x'^4}{[(1-\beta)^2x'^2-4\beta y'^2]^2}$$

reducirt, dessen Vorzeichen nur von β abhängt, da der Factor von 4β positiv ist. Ist also die Directrix eine Ellipse oder β positiv, so ist der vorstehende Ausdruck positiv, d. h. stellt eine Hyperbel vor; ist die Directrix eine Hyperbel oder β negativ, so zeigt er eine Ellipse an.

Aus der Betrachtung der in III. entwickelten Coordinaten der vier Punkte, wo die gefundene Curve die Seiten des erwähnten Vierecks berührt, erhellt (indem man die Nenner zum Verschwinden bringt), was nur für den Fall einer Ellipse als Directrix möglich ist, wo nach dem eben Bemerkten die Curve eine Hyperbel ist, weil nur dann $\sqrt{\beta}$ reell ist, dass, wenn der Pol auf einer der beiden Geraden $y=\pm x\sqrt{\beta}$ oder $y=\pm\frac{b}{a}x$ liegt, die Gerade $nA+mC=0$ eine Asymptote der Curve ist,

wenn er auf einer der beiden Geraden $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}x$ oder $y=\pm\frac{a}{b}x$ liegt,

$nA-mC=0$ Asymptote ist;

. . . . $y=\pm x$ liegt,

$nB-mC=0$ Asymptote ist;

. . . . $y=\pm\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}x$

oder liegt,

. . . . $y=\pm\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}}x$

$nB+mC=0$ Asymptote ist.

Das Letzte kann jedoch nicht der Fall sein, weil $\beta < 1$, also $\beta - 1$ negativ, und daher $\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}$ und $\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}}$ imaginär sind.

Die übrigen Geraden sind leicht zu construiren: $y = \pm\frac{b}{a}x$ ist nämlich nichts Anderes, als die durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Linie, derjenigen parallel, welche das Ende der grossen Axe mit dem der kleinen verbindet; $y = \pm\frac{a}{b}x$ steht auf der vorigen senkrecht; $y = \pm x$ halbiren, durch den Mittelpunkt gehend, den rechten Winkel, welchen beide Axen mit einander bilden.

Eine nähere Betrachtung zeigt ferner von selbst, dass, wenn sich, bei beliebiger Directrix, der Pol in der Peripherie eines derselben concentrischen Kreises bewegt, nur die Lage der Umhüllungscurve geändert wird, keineswegs aber die Form derselben. Dieselbe bewegt sich in diesem Falle mit ihrem Mittelpunkte ebenfalls auf der Pripherie eines concentrischen Kreises. Bestimmt man nämlich aus den Coefficienten der Gl. 10) auf bekannte Weise die Coordinaten ihres Mittelpunktes, so ergibt sich, da in diesem Falle $x'^2 + y'^2 = r^2$ ist, wenn r den Radius des vom Pole beschriebenen Kreises vorstellt:

$$y_0 = -\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r^2}y',$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r^2}x';$$

also auch

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{4}\frac{(1+\beta)^2\varepsilon^2}{\beta^2 r^4}\cdot r^2 = \frac{1}{4}\frac{(1+\beta)^2\varepsilon^2}{\beta^2 r^2}.$$

Der Radius des in Rede stehenden Kreises ist also $\frac{1}{2}\frac{(1+\beta)\varepsilon}{\beta r}$ *); er geht für $\beta = -1$, d. h. für die gleichseitige Hyperbel, wo die Bewegung des Pols im Kreise keinen Einfluss hat, in einen Punkt über.

V.

Betrachten wir zweitens die von den **Asymptotenchorden** eingehüllte Curve. Hier ist die Ausgangsgleichung so zu wählen,

*) Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Umhüllungscurve, so reducirt sich ihre Gleichung auf

$$y^2 + \frac{2m^2x'y'}{m^2y'^2 - n^2r^2}xy + \frac{m^2x'^2 - nr^2}{m^2y'^2 - n^2r^2}x^2 - \frac{n^2\varepsilon^2}{\beta^2} = 0.$$

dass auch das System zweier Geraden nicht ausgeschlossen ist was bei den Chordalen nicht nöthig war.

Wir setzen also

$$1)\qquad y^2+2\alpha xy+\beta x^2+\varepsilon=0$$

als Gleichung der Directrix, d. h. geben ihr keine bestimmte primitive Lage. (Alles übrige wie vorhin).

Die Gleichung der um Winkel ω gedrehten Curve wird hier

$$2)\quad (\cos^2\omega+\beta\sin^2\omega+\alpha\sin2\omega)y^2+(2\alpha\cos^2\omega-2\alpha\sin^2\omega-(1-\beta)\sin2\omega)\,xy$$
$$+(\sin^2\omega+\beta\cos^2\omega-\alpha\sin2\omega)x^2+\varepsilon=0,$$

oder mit Einführung des doppelten Winkels, so wie von m und n:

$$3)\quad (m+n\cos2\omega+2\alpha\sin2\omega)y^2+2(2\alpha\cos2\omega-n\sin2\omega)\,xy$$
$$+(m-n\cos2\omega-2\alpha\sin2\omega)x^2+2\varepsilon=0.$$

Nach einigen Reductionen resultirt als Gleichung ihrer Asymptotenchorde *):

$$4)\quad [n\left(y'y-x'x+\frac{x'^2-y'^2}{2}\right)+2\alpha(x'y+y'x-x'y')]\cos2\omega$$
$$+[2\alpha\left(y'y-x'x+\frac{x'^2-y'^2}{2}\right)-n(x'y+y'x-x'y')]\sin2\omega$$
$$+m\left(y'y+x'x'-\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)+\varepsilon=0.$$

Setzt man wieder:

$$y'y-x'x+\frac{x'^2-y'^2}{2}=A,$$
$$x'y+y'x-x'y'=B,$$

---

*) Für den allgemeinen Kegelschnitt

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

ist nämlich

$$(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x-\tfrac{1}{2}(y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2-\varepsilon)=0$$

die Gleichung der Asymptotenchorde, und hier ist

für α: $\dfrac{2\alpha\cos2\omega-n\sin2\omega}{m+n\cos2\omega+2\alpha\sin2\omega}$, für β: $\dfrac{m-n\cos2\omega-2\alpha\sin2\omega}{m+n\cos2\omega+2\alpha\sin2\omega}$, $\gamma=\delta=0$,

für ε: $\dfrac{2\varepsilon}{m+n\cos2\omega+2\alpha\sin2\omega}$

zu setzen.

$$y'y + x'x - \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{\varepsilon}{m} = C;$$

so geht 4) über in

$$5)\quad mC + (nA + 2\alpha B)\cos 2\omega + (2\alpha A - nB)\sin 2\omega = 0.$$

Die weitere Entwickelung (Differenzirung und Elimination von ω) ist der früheren identisch. Die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve ist demnach

$$6)\quad (nA + 2\alpha B)^2 + (2\alpha A - nB)^2 - m^2C^2 = 0$$

oder

$$7)\quad (n^2 + 4\alpha^2)(A^2 + B^2) - m^2C^2 = 0.$$

VI.

Entwickelt man Gleichung 7), so resultirt

$$(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)\left(x^2+y^2-y'y-x'x+\frac{x'^2+y'^2}{4}\right) - m^2\left(y'y+x'x-\frac{x'^2+y'^2}{2}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^2=0$$

oder

$$8)\quad \left(x-\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{y'}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left[y'\left(y-\frac{y'}{2}\right)+x'\left(x-\frac{x'}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{m}\right]^2=0.$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in Punkt $\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}$, d. h. in den Halbirungspunkt der Linie, welche den Mittelpunkt der Directrix mit dem Pole verbindet, und lässt die Richtung der Axen ungeändert, so geht 8) über in

$$x^2+y^2-\frac{m^2}{(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left[\frac{y'}{2}\cdot y+\frac{x'}{2}\cdot x+\frac{\varepsilon}{m}\right]^2=0,$$

wo auch x' und y' nicht mehr die früheren, sondern die auf diese neuen Axen bezogenen Coordinaten des Poles sind, oder in

$$9)\quad x^2+y^2-\frac{m^2}{4(n^2+4\alpha^2)(x'^2+y'^2)}\left(y'y+x'x+\frac{2\varepsilon}{m}\right)^2=0.$$

Die Einhüllungscurve ist demnach, wie aus der Vergleichung mit der früher für die Chordalen entwickelten Gleichung erhellet, dieser ganz ähnlich und unterscheidet sich nur durch $4(n^2+4\alpha^2)$ statt des früheren n^2.

Für Ellipse und Hyperbel kann $\alpha=0$ gesetzt werden, indem man die bei der Betrachtung der Chordalcurve als primitiv angesehene Lage auch hier annehmen kann. Es würden sich beide Curven also nur durch ihre Lage und durch die Modification, welche $2n$ bei dieser statt n bei jener bewirkt, unterscheiden. Die hier mit $A=0$, $B=0$, $C=0$ bezeichneten Geraden sind den früheren parallel, $B=0$ oder $\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1$ ist die Asymptotenchorde des Systems der beiden primitiven Hauptaxen, geht also nach der oben erwähnten Verlegung der Axen durch den neuen Anfangspunkt, und ist dann für die neuen Coordinaten ganz identisch der früheren $B=0$ für die alten.

$A=0$ ist der entsprechenden der Chordalcurve in der bloss von der Lage des Pols abhängigen Entfernung $\frac{x'^2-y'^2}{2\sqrt{x'^2+y'^2}}$ parallel.

$C=0$ ist die Asymptotenchorde*) des mit dem Radius $\sqrt{\frac{-\varepsilon}{1+\beta}}$ oder $\frac{ab}{\sqrt{a^2\pm b^2}}$ aus dem Mittelpunkte der Directrix beschriebenen Kreises, und in diese geht die Umhüllungscurve über, wenn die Directrix ein Kreis oder $n=0$ ist, wo $\frac{-\varepsilon}{1+\beta}=\frac{r^2}{2}$ ist, also

$$C=0:\ y'y+x'x=\sqrt{\frac{x'^2+y'^2-r^2}{2}},$$

die Asymptotenchorde des Kreises vom Radius r. Auch hier sind offenbar das Viereck und die Tangentialpunkte leicht zu construiren.

Ist die Directrix eine gleiseitige Hyperbel, so geht die Umhüllungscurve in den Kreis $x^2+y^2=\frac{\varepsilon^2}{4(x'^2+y'^2)}$ über, dessen Radius $\frac{\varepsilon}{2d}$ ist. Er unterscheidet sich von dem früheren dadurch, dass sein Mittelpunkt im Halbirungspunkte der Geraden liegt, welche den Mittelpunkt des ersteren mit dem Pole verbindet, und dass sein Radius halb so gross ist. Auch hier gilt hinsichtlich der kreisförmigen Bewegung des Pols wieder das früher Gesagte.

Für ein System zweier Geraden ist in Gleichung 9) $\varepsilon=0$ zu setzen. In diesem Falle aber schneiden sich die drei Linien $A=0$, $B=0$,

*) Die Asymptotenchorde des Kreises $x^2+y^2+\varepsilon=0$ ist nämlich nach dem Füheren

$$y'y+x'x-\tfrac{1}{2}(y'^2+x'^2-\varepsilon)=0.$$

$C=0$ in einem Punkte. $C=0$ ist nämlich jetzt in den alten Coordinaten $y'y+x'x=\frac{x'^2+y'^2}{2}$, d. h. das im Halbirungspunkte auf die den Pol mit dem Mittelpunkte der Directrix verbindende Gerade errichtete Perpendikel und $A=0$, sowie $B=0$ gehen durch denselben Punkt, welcher der neue Anfangspunkt ist, da sich $A=0$ schreiben lässt:

$$y'\left(y-\frac{y'}{2}\right)-x'\left(x-\frac{x'}{2}\right)=0,$$

und $B=0$:

$$x'\left(y-\frac{y'}{2}\right)+y'\left(x-\frac{x}{2}\right)=0.$$

(Dass beide auf einander senkrecht sind, ist bereits bekannt). Auch durch Elimination zwischen diesen drei Gleichungen lässt sich Dasselbe nachweisen*).

Hierin liegt auch noch folgender Satz, indem man auch $\beta=0$ denken kann, also das System $y^2-2\alpha xy=0$ oder $y(y-2\alpha x)=0$, d. h. die Axe der x und eine sich im Anfangspunkte drehende Gerade:

Haben Parallelogramme eine Diagonale gemeinschaftlich und liegen zwei parallele Seiten derselben in einer und derselben Geraden, so schneiden und halbiren sich die anderen Diagonalen im Halbirungspunkte der ersteren **).

---

*) Es ist nämlich

$$B.y'-A.x'\equiv y'x'.y+y'^2.x-y'^2x'-\left(x'y'.y-x'^2.x-x'\left(\frac{y'^2-x'^2}{2}\right)\right)=0$$

oder

$$(x'^2+y'^2)x=x'\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right),$$

$$x=\tfrac{1}{2}x'.$$

Dies in $C=0$ substituirt, gibt:

$$y'y+\frac{x'^2}{2}-\frac{x'^2+y'^2}{2}=0,$$

$$y'y=\frac{y'^2}{2},$$

$$y=\tfrac{1}{2}y'.$$

**) Es versteht sich zwar von selbst, dass die zweiten Diagonalen der Parallelogramme, die bereits eine Diagonale gemeinschaftlich haben, sich im Halbirungspunkte letzterer schneiden (und halbiren); doch ist der obige Satz keineswegs seines Inhaltes, sondern des eigenthümlichen Weges seiner Auffindung wegen angeführt worden.

Nachschrift.

Zu seinem früheren Aufsatze, von welchem der vorhergehende die Fortsetzung ist, hat mir der Herr Vf. eine Berichtigung eingesandt. Er bittet nämlich die geehrten Leser, in Thl. XIV. S. 384. statt der Worte: „Aus Gleichung (1) ist ersichtlich" bis „schneiden sich in einem festen Punkte" gefälligst das Folgende zu setzen:

„Aus Gleichung (1) ist ersichtlich, dass sich alle Asymptotenchorden im Anfangspunkte schneiden, wenn die Bahn des Poles ein Kegelschnitt von der Gleichung $y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=0$ ist. Nun ist aber dieser dem gegebenen Kegelschnitte, der Directrix, ähnlich und ähnlich liegend, schneidet ihn in denselben beiden Punkten, wie die Chordale des Anfangspunktes, da

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon\equiv(y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon)-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)$$

oder

$$\equiv\Omega-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)=0$$

ist, und hat ferner den Anfangspunkt selbst zum Mittelpunkte.

Hieraus ergibt sich also unmittelbar der Lehrsatz:

„Schneiden sich zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte in den beiden Punkten, wo die vom Centrum des ersten nach dem zweiten gezogenen Tangenten diesen berühren, so schneiden sich auch die Halbirungslinien aller Tangentenpaare, die man von beliebigen Punkten des ersten aus nach dem zweiten zieht, in dessen Centrum" und, auf Kreise angewandt, den interessanten Satz (Cfr. Plücker, analyt. Entwickelungen B. I. S. 65., N. 127):

„Schneiden sich zwei Kreise orthogonal, so treffen sich die Halbirungslinien der Tangentenpaare, die man von beliebigen Punkten eines der beiden Kreise nach dem andern zieht, im Centrum des ersteren"

welcher Satz, wenn mehrere Kreise, statt des einen Paares, combinirt werden, noch weiterer Ausdehnung fähig ist."

G.

XVI.

Neue einfache und leichte Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie kann man bekanntlich auf verschiedene Arten ableiten. Es lässt sich dabei ein rein analytischer Weg einschlagen, oder man kann sich einer geometrischen, sich an eine Figur anschliessenden Betrachtung bedienen. So schön die erstere Methode ist, so dürfte doch für Anfänger die letztere allein, oder wenigstens vorzugsweise geeignet sein, und sie ist es daher auch, welche ich für jetzt im Folgenden allein im Auge habe. Diese geometrische Methode hat mir aber immer noch nicht diejenige Einfachheit zu besitzen geschienen, welche der Elementarunterricht fordert, und ich habe mich daher, so oft sich mir dazu nur irgend Gelegenheit darbot, immer eifrig nach einer einfacheren Darstellung als die gewöhnliche umgesehen. Meistens beweiset man den Satz, dass sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel verhalten, und auch die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel durch Betrachtung einer Figur, und leitet dann aus der letzteren Relation die Relation zwischen den drei Winkeln und einer Seite mittelst des Supplementardreiecks ab. Aber gerade diese so eben erwähnte Ableitung hat, so schön und einfach sie auch an sich ist, insofern sie die auf geometrischem Wege zu bewirkende Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit seinem Supplementardreiecke voraussetzt, für den Anfänger immer einige Schwierig-

keit, und die Betrachtung des Supplementardreieckes selbst scheint mehr der Stereometrie als der sphärischen Trigonometrie anzugehören, weshalb sie auch oft in der letzteren als schon aus der ersteren bekannt vorausgesetzt wird. Selbst auch schon die gewöhnlichen geometrischen Beweise der Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel nehmen manche goniometrischen Transformationen in Anspruch, die man im Interesse der Anfänger wenigstens theilweise wohl noch vermieden sehen möchte. Vor Kurzem bin ich, nach früherem öfteren vergeblichen Suchen, zufällig auf eine Ableitung der in Rede stehenden Grundformeln gekommen, welche ich in der That für so einfach halte, dass ich glaube, dass sie wohl verdient, auf den folgenden Blättern mitgetheilt zu werden. Ich werde dabei, ohne weitere Erläuterung, die bekannten in der Trigonometrie durchgängig gebräuchlichen Bezeichnungen beibehalten.

§. 2.

Wir wollen zuerst das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 3.), wo A der rechte Winkel sein soll, betrachten.

Fällen wir von C auf OA und OB die Perpendikel CA' und CB', und ziehen dann $A'B'$, so steht CA' auf der Ebene AOB, also auch auf $A'B'$ senkrecht, und $A'B'$ steht auf OB senkrecht. Daher ist der Winkel $A'B'C$ dem Winkel B des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC gleich.

Nun ist

$$CA' = OC.\sin b,$$

$$CA' = CB'.\sin B = OC.\sin a \sin B;$$

also

$$OC.\sin b = OC.\sin a \sin B,$$

d. i.

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \text{ und eben so} \\ \sin c = \sin a \sin C. \end{cases}$$

Ferner ist

$$A'B' = B'C.\cos B = OC.\sin a \cos B,$$

$$A'B' = OA'.\sin c = OC.\cos b \sin c;$$

also

$$OC.\sin a \cos B = OC.\cos b \sin c,$$

woraus

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c,$$

oder

$$\cos B = \cos b \frac{\sin c}{\sin a};$$

folglich nach I.

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \cos B = \cos b \sin C, \text{ und ganz eben so} \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Endlich ist

$$\cos a = \frac{OB'}{OC} = \frac{OA'.\cos c}{OC} = \frac{OC.\cos b \cos c}{OC},$$

also

$$\text{III.} \qquad \cos a = \cos b \cos c.$$

§. 3.

Sei nun ABC (Taf. III. Fig. 4.) ein beliebiges sphärisches Dreieck. In diesem sphärischen Dreiecke fälle man von A auf BC das Perpendikel AD, und bezeichne die Winkel BAD, CAD durch x, y; die Bogen BD, CD durch u, v; das Perpendikel AD durch w.

Dann ist nach I. in den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ABD und ACD:

$$\sin w = \sin c \sin B, \quad \sin w = \sin b \sin C;$$

also

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B,$$

und daher überhaupt:

$$\text{I*.} \quad \begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C. \end{cases}$$

Ferner ist nach I.

$$\sin x = \frac{\sin u}{\sin c}, \quad \sin y = \frac{\sin v}{\sin b};$$

und nach II.

$$\cos x = \cos u \sin B, \quad \cos y = \cos v \sin C;$$

aber nach I.

$$\sin B = \frac{\sin w}{\sin c}, \quad \sin C = \frac{\sin w}{\sin b};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos x = \frac{\cos u \sin w}{\sin c}, \quad \cos y = \frac{\cos v \sin w}{\sin b}.$$

Folglich ist

$$\cos x \cos y = \frac{\cos u \cos v \sin w^2}{\sin b \sin c}, \quad \sin x \sin y = \frac{\sin u \sin v}{\sin b \sin c};$$

und weil nun

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

ist, so ist

$$\cos(x \pm y) = \frac{\cos u \cos v \sin w^2 \mp \sin u \sin v}{\sin b \sin c}$$

oder

$$\cos(x \pm y) = \frac{\cos u \cos v \mp \sin u \sin v - \cos u \cos v \cos w^2}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(u \pm v) - \cos u \cos v \cos w^2}{\sin b \sin c}.$$

Folglich ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos v \cos w . \cos u \cos w}{\sin b \sin c},$$

d. i. nach III.

$$\text{II*.} \left\{ \begin{array}{l} \cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ und ganz eben so} \\ \cos B = \dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}, \\ \cos C = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \end{array} \right.$$

Endlich ist nach I*.

$$\sin u \sin B = \sin x \sin w, \quad \sin v \sin C = \sin y \sin w;$$

also

$$\sin u = \frac{\sin x}{\sin B} \sin w, \quad \sin v = \frac{\sin y}{\sin C} \sin w;$$

und nach II.

$$\cos u = \frac{\cos x}{\sin B}, \quad \cos v = \frac{\cos y}{\sin C}.$$

Also ist

$$\cos u \cos v = \frac{\cos x \cos y}{\sin B \sin C}, \quad \sin u \sin v = \frac{\sin x \sin y \sin w^2}{\sin B \sin C},$$

folglich, weil

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

ist:

$$\cos(u \pm v) = \frac{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y \sin w^2}{\sin B \sin C}$$

oder

$$\cos(u \pm v) = \frac{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y \pm \sin x \sin y \cos w^2}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos(x \pm y) \pm \sin x \sin y \cos w^2}{\sin B \sin C}.$$

Folglich ist

$$\cos a = \frac{\cos A \pm \sin x \cos w . \sin y \cos w}{\sin B \sin C},$$

wo das obere Zeichen dem ersten, das untere Zeichen dem zweiten der beiden in Taf. III. Fig. 4. dargestellten Fälle entspricht. Nun ist aber mit derselben Bestimmung wegen der Zeichen nach II.

$$\cos B = \sin x \cos w, \quad \pm \cos C = \sin y \cos w;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\text{III*.}\quad \begin{cases} \cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \text{ und ganz eben so} \\ \cos b = \dfrac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}, \\ \cos c = \dfrac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \end{cases}$$

Dies sind jetzt die bekannten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, und ich sollte meinen, dass sich diese Ableitung vor der gewöhnlichen an Figuren und das Supplementardreieck geknüpften Ableitung in mehr als einer Beziehung empfehlen, und daher bei dem Unterrichte wohl besondere Berücksichtigung verdienen möchte. Ja ich glaube, dass die obige Darstellung als ein neuer Beweis gelten kann, dass man in vielen Theilen der Mathematik, namentlich auch in den sogenannten elementaren Theilen, noch lange nicht immer die einfachsten Darstellungen gefunden hat, eine Bemerkung, deren Richtigkeit besonders in neuerer Zeit in mehreren Fällen auf sehr in die Augen fallende Weise dargethan worden ist.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass auch die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks auf ähnliche Weise wie oben die Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines sphärischen Dreiecks abgeleitet werden kann, wenn ich auch diese Ableitung der gewöhnlichen allgemein bekannten Ableitung der in Rede stehenden Relation nicht gerade vorzuziehen geneigt sein würde.

Wenn in Taf. III. Fig. 5. die Linie AD auf BC senkrecht steht, so ist, wenn man sich der aus der Figur selbst ersichtlichen Bezeichnungen bedient:

$$\cos x = \frac{w}{c}, \quad \cos y = \frac{w}{b};$$

$$\sin x = \frac{u}{c}, \quad \sin y = \frac{v}{b};$$

also

$$\cos x \cos y = \frac{w^2}{bc}, \quad \sin x \sin y = \frac{uv}{bc}.$$

Folglich ist

$$\cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \frac{w^2 \mp uv}{bc}$$

oder

$$\cos(x \pm y) = \frac{w^2 \mp uv}{bc} = \frac{2w^2 \mp 2uv}{2bc}.$$

Nun ist aber

$$w^2 = b^2 - v^2 = c^2 - u^2,$$

also

$$\cos(x \pm y) = \frac{(b^2 - v^2) + (c^2 - u^2) \mp 2uv}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - (u^2 \pm 2uv + v^2)}{2bc},$$

d. i.

$$\cos(x \pm y) = \frac{b^2 + c^2 - (u \pm v)^2}{2bc},$$

und folglich, mit Rücksicht auf die beiden in der Figur dargestellten Fälle:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

welches die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks ist.

Ich möchte mir schliesslich noch einmal erlauben, das Obige den Herren Lehrern der Mathematik recht dringend zur gefälligen Beachtung bei dem Unterrichte in der sphärischen Trigonometrie zu empfehlen, den ich für so wichtig erachte, dass ich es für einen wahren Rückschritt halte, dass er, wenigstens auf preussischen Gymnasien, nicht mehr ertheilt wird, wie es wohl früher der Fall war, als ich selbst noch meine geringen Kräfte mit grosser Freudigkeit dem Gymnasialunterrichte an verschiedenen Lehranstalten widmete.

XVII.

Ueber das Dreieck, worin die Transversalen gleich sind, welche zwei Winkel desselben nach gleichem Verhältniss theilen.

Von dem
Herrn Doctor R. Baltzer,
Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Die Aufforderung im Archiv Thl. XIII. S. 341. erinnert mich an zwei Beweise des fraglichen Lehrsatzes, welche, ich glaube im Jahre 1844, in einem Kränzchen hiesiger mathematischer Freunde mitgetheilt wurden, den einen von dem leider früh verstorbenen Professor A. Seebeck, dessen Manuscript noch vorhanden und weiter unten abgedruckt ist, den andern von mir. Der in Rede stehende Satz scheint der Sphäre der Elementargeometrie anzugehören, wo es sich um die Beziehungen zwischen Seiten und gegenüberliegenden Winkeln der Dreiecke handelt, und wird deshalb wie folgt durch Umkehrung gewonnen.

Lemma. Haben zwei Dreiecke die Winkel einzeln gleich und ist eine Seite des einen Dreiecks kleiner als die gleichliegende des andern, so sind die übrigen Seiten des einen ebenfalls kleiner als die gleichliegenden des andern.

Beweis durch Zusammenlegen der gleichen Winkel, denen die kleinere Seite anliegt.

Lehrsatz 1. Ist im Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 6.) Winkel $A<B$, und theilt man diese Winkel durch AD und BE so, dass $\widehat{CAD}=\widehat{CBE}$, so ist $AD>BE$.

Beweis. Die Dreiecke ACD und BCE haben einzeln gleiche Winkel. Nun ist $AC > BC$, weil $\widehat{ABC} > \widehat{BAC}$ nach Voraussetzung, folglich $AD > BE$ gegenüber den gleichen Winkeln C. W. z. b. w.

Lehrsatz 2. Ist im Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 7.) Winkel $A < B$ und theilt man diese Winkel durch AD und BE so, dass $\widehat{BAD} < \widehat{ABE}$ und $\widehat{CAD} < \widehat{CBE}$, so ist $AD > BE$.

Beweis. Zieht man BC' so, dass $\widehat{C'BE} = \widehat{C'AD'}$, so ist $AD' > BE$ nach Lehrsatz 1. Nun ist AD' ein Theil von AD, folglich um so mehr $AD > BE$. W. z. b. w.

Lehrsatz 3. Sind die Geraden AD und BE, welche die Winkel A und B des Dreiecks ABC so theilen, dass $\widehat{BAD} : \widehat{DAC} = \widehat{ABE} : \widehat{EBC}$, einander gleich, so ist $A = B$ und das Dreieck gleichschenklig.

Beweis. Wäre A ungleich B, also $\widehat{BAD}$ ebenso ungleich $\widehat{ABE}$, und $\widehat{DAC}$ ebenso ungleich $\widehat{EBC}$, so wäre BE ebenso ungleich AD (Lehrs. 2.) Dies ist gegen die Voraussetzung $AD = BE$. Also kann A nicht ungleich B sein. W. z. b. w.

Das Folgende ist von dem leider zu früh verstorbenen Professor A. Seebeck zu Dresden.

Der Satz:

„Wenn die Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel, gerechnet bis zur gegenüberstehenden Seite, gleich sind, so ist das Δ gleichschenklig“

kann auf folgenden allgemeineren zurückgeführt werden:

(A) „Wenn ein Dreieckswinkel halbirt ist und die durch einen Punkt der Halbirungslinien aus den beiden anderen Winkelspitzen gezogenen Transversalen gleich sind, so ist das Δ gleichschenklig.“

Dieser Satz aber ergiebt sich aus folgendem:

Wenn durch einen Punkt der Halbirungslinie eines Winkels Transversalen zwischen den Schenkeln gezogen werden, so ist die auf der Halbirungslinie rechtwinklig stehende Transversale die kürzeste, und die

übrigen sind um so grösser, je mehr sie von derselben abweichen.

In Taf. III. Fig. 8. sei BM die Halbirungslinie und AC so gezogen, dass $AB > BC$; es soll gezeigt werden, dass $DE > AB$. — Da $DM > AM$, so ist der Beweis nur zu führen, wenn $ME < MC$, d. h. $\angle MEC$ stumpf ist. Mache $MF = MA$ und $MG = ME$, so ist $\Delta AMF \backsim \Delta EMG$, und da $MA > MC > MG$, so ist auch 1) $AF > EG$; ferner $\angle DAM > \angle CEM$, daher 2) $\angle DAF > \angle CEG$; endlich 3) $\angle AFD = \angle EGC$. Aus diesen drei Bestimmungen ergiebt sich leicht $DF > GC$, und daher, indem man $FE = AG$ hinzuaddirt, $DE > AC$, w. z. b. w.

Aus diesem Satze ergiebt sich der erstgenannte (A) dadurch, dass sich eine Transversale von gegebener Länge nur in zwei Lagen eintragen lässt, welche symmetrisch sein müssen. (Man vergl. (Taf. III. Fig. 9.).

Dieser Beweis kann auch auf das sphärische Δ angewendet werden. In Taf. III. Fig. 10. sei $\angle AMB < 180^{0}$; $BM < 90^{0}$; es sei wieder $AB > BC$, so ist $AM > MC$ und $DM > AM$, weil $MC'(=MC)$, MA und MD auf einer Seite des auf AB gefällten Lothes ML liegen. Da $AG < 180^{0}$, so erhält man $AF > EG$; ferner, wenn man $\angle AMD$ unendlich klein annimmt, $\angle AFD = \angle EGC$ und $\angle DAF > \angle GEC$, woraus $DF > GC$, und das Uebrige ganz wie beim ebenen Δ folgt.

Ist der $\angle ABC > 180^{\circ}$ so ändert sich nur das, dass die Transversalen um so kleiner werden, je mehr sie gegen die Halbirungslinien geneigt sind.

XVIII.

Messung einer an beiden Endpunkten unzugänglichen Entfernung nach einer besonderen Methode.

Von

dem Herausgeber.

Ich glaube, dass das Winkelkreuz oder die Kreuzscheibe ein für die elementare Feldmesskunst in vielen Fällen sehr brauchbares Instrument ist, und auch bei dem geometrischen Elementarunterrichte, mit dem nach meiner Meinung immer, so viel als thunlich, Uebungen in der Feldmesskunst zu verbinden wären, mehr als dies bisher geschehen zu sein scheint, angewandt werden sollte, namentlich auch der grössern Wohlfeilheit dieses Instruments wegen. Gewöhnlich richtet man das Winkelkreuz so ein, dass die beiden Visirlinien auf einander senkrecht stehen, und dies ist auch in der That die Einrichtung, welche die einfachste und häufigste Anwendung dieses Instruments in der praktischen, namentlich in der auf die Landwirthschaft angewandten, Feldmesskunst gestattet. Aber auch schon zwei nur einen constanten, sonst beliebigen, Winkel mit einander einschliessende Visirlinien, — la fausse Equerre d'Arpenteur, wie die Franzosen sagen, — bieten viele sehr einfache und elegante Anwendungen dar, wobei es jedoch gut ist, die Lage der beiden Visirlinien gegen einander verändern, und dem constanten Winkel eine für die vorhabende Anwendung zweckmässige Grösse geben zu können, wodurch natürlich zugleich bedingt wird, dass an dem Instrumente die nöthigen Schrauben angebracht sind, um die beiden Visirlinien, nachdem man ihrem Neigungswinkel gegen einander die für die vorhabende Anwendung zweckmässige Grösse gegeben hat, in unveränderlicher Lage gegen einander befestigen

zu können. Ich lasse mir jetzt ein solches Winkelkreuz mit zwei beweglichen Visirlinien anfertigen, bei welchem die Visirlinien durch die optischen Axen zweier kleinen astronomischen Fernröhre dargestellt werden, und werde späterhin einige mit diesem Instrumente gemachte Anwendungen, die, um die erreichte Genauigkeit beurtheilen zu können, eine Vergleichung verschiedener für dieselbe Grösse erhaltener Resultate gestatten, in dem Archive mittheilen. Die Kosten eines solchen mit zwei kleinen astronomischen Fernröhren versehenen Winkelkreuzes sind gar nicht bedeutend, wenigstens keineswegs so bedeutend, als Mancher wohl glauben möchte, da man ja jetzt kleine astronomische Fernröhre in vorzüglicher Güte um sehr geringe Preise erhalten kann. Man braucht sie, wenn man nicht will, für den vorliegenden Zweck nicht einmal achromatisch machen zu lassen.

Ich werde jetzt im Folgenden eine Auflösung der Aufgabe: „die Länge einer an ihren beiden Endpunkten unzugänglichen geraden Linie zu messen“ mit Hülfe des Winkelkreuzes geben, die ich für sehr elegant halte. Ich entlehne dieselbe der folgenden in vielen Beziehungen interessanten Schrift: Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique; pour servir de supplément aux Traités connus de cette Science; recueillies par F. J. Servois. A Metz. An XII. p. 75., bemerke aber, dass Servois selbst sagt, dass diese Auflösung schon von Mascheroni in der Schrift: Problemi per gli Agrimensori con varie Soluzioni. Pavia. 1793. Probl. III. Soluz. 13. gegeben worden sei. Der Beweis, den ich im Folgenden für diese Auflösung geben werde, rührt von mir selbst her, da der von Servois a. a. O. gegebene Beweis auf der Trigonometrie beruhet, die ich hier absichtlich vermeiden, und mich bloss der Sätze der ebenen Geometrie bedienen wollte.

Wenn MN (Taf. IV. Fig. 1.) die zu messende Linie ist, so suche man auf dem Terrain drei Punkte A, B, C von solcher Lage auf, dass die Winkel MAN, MBN, MCN, unter denen in diesen drei Punkten die zu messende Linie MN erscheint, dem Winkel des Winkelkreuzes, und daher natürlich auch unter einander gleich sind. Dann messe man die Linien AB, AC, und suche mit dem Winkelkreuze in der Linie BC den Punkt D auf, welcher in der Linie BC eine solche Lage hat, dass der Winkel ADC gleichfalls dem Winkel des Winkelkreuzes, also auch den drei Winkeln MAN, MBN, MCN gleich ist. Misst man hierauf noch die Linie AD, so ist

$$MN=\frac{AB.AC}{AD},$$

und die Länge der zu messenden Linie MN kann folglich mittelst dieser einfachen Formel aus den gemessenen Stücken leicht berechnet werden.

Bevor wir zu dem Beweise der vorhergehenden Formel übergehen, schicken wir die folgende, übrigens zu einem anderweitig

schon allgemein bekannten Satze führende Betrachtung voraus, wozu uns nur der Wunsch veranlasst, diesen Gegenstand ganz ohne Hülfe der Trigonometrie zu behandeln.

In Taf. IV. Fig. 2. sei O der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC, dessen Seiten BC, CA, AB wir wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnen, beschriebenen Kreises. Denken wir uns nun von O auf AB das Perpendikel OC', von B auf AC das Perpendikel BB'' gefällt, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke AOC', oder BOC', und BCB'' offenbar einander ähnlich, weil der Winkel AOB doppelt so gross als der Winkel BCB'', folglich $\angle AOC' = \angle BCB''$ ist. Also ist

$$BB'' : BC = AC' : AO,$$

und folglich, wenn wir den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises durch r bezeichnen:

$$BB'' : a = \frac{1}{2}c : r,$$

also

$$r = \frac{ac}{2.BB''}.$$

Ist nun Δ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, so ist

$$\Delta = \frac{1}{2}AC.BB'', \quad BB'' = \frac{2\Delta}{AC} = \frac{2\Delta}{b},$$

und folglich, wenn man dies in den obigen Ausdruck von r einführt:

$$r = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Denken wir uns jetzt in Taf. IV. Fig. 3. über MN als Sehne einen den Winkel des Winkelkreuzes fassenden Kreisabschnitt beschrieben, so geht der diesen Kreisabschnitt begränzende Kreisbogen nach der aus dem Obigen bekannten Construction durch die drei Punkte A, B, C hindurch, und der Kreis, welchem dieser Kreisbogen angehört, dessen Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen, ist folglich um das Dreieck $ABC = \Delta$, dessen Seiten BC, CA, AB wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden sollen, beschrieben. Fällt man nun von A auf BC das Perpendikel $AE = h$, von dem Mittelpunkte O des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises auf $MN = x$ das Perpendikel OL, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADE und MOL offenbar einander ähnlich, weil nach der Construction nothwendig der Winkel MON doppelt so gross als der Winkel des Winkelkreuzes, also auch doppelt so gross als der Winkel ADE, folglich $\angle MOL = \angle ADE$ ist. Also ist

$$AD : AE = OM : ML,$$

d. i., wenn wir noch $AD = d$ setzen:

$$d : h = r : \frac{1}{2} x,$$

woraus

$$x = \frac{2rh}{d}$$

folgt. Nun ist

$$\Delta = \frac{1}{2} ah, \text{ also } h = \frac{2\Delta}{a};$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$x = \frac{4r\Delta}{ad}.$$

Nach der oben vorausgeschickten Betrachtung ist aber

$$r = \frac{abc}{4\Delta}, \text{ also } 4r\Delta = abc.$$

Führt man dies in den vorhergehenden Ausdruck von x ein, so ergiebt sich

$$x = \frac{bc}{d},$$

und wenn man für b, c, d, x wieder die diesen Symbolen entsprechenden Linien setzt:

$$MN = \frac{AB.AC}{AD},$$

welches die zu beweisende Formel war.

Rücksichtlich der Auswählung der Punkte A, B, C wollen wir nur in der Kürze bemerken, dass es der Genauigkeit des zu erzielenden Resultats gewiss förderlich sein wird, wenn dieselben möglichst weit aus einander liegen, in Verhältniss zu der zu messenden Linie MN.

XIX.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische.

Von

dem Herausgeber.

I.

Wenn ich noch einmal auf diese — auch von mir selbst — schon vielfach behandelte Aufgabe zurückkomme, so wird dies gewiss in der grossen praktischen Wichtigkeit derselben seine Rechtfertigung finden. Auch lassen in der That alle bis jetzt bekannt gemachten Methoden immer noch Etwas zu wünschen übrig. Am Häufigsten wird wohl in der Praxis die Lehmann'sche Methode der sogenannten fehlerzeigenden Dreiecke angewandt. Aber auch diese Methode hat mich — ich gestehe es offen — niemals ganz befriedigt; insbesondere finden Anfänger öfters einige Schwierigkeit bei der Beurtheilung der Lage des gesuchten Punktes gegen das fehlerzeigende Dreieck, ob derselbe nämlich innerhalb oder ausserhalb, und, im letzteren Falle, auf welcher Seite dieses Dreiecks derselbe liegt, was auch wahrscheinlich Herrn Prof. Hartner in Gratz zu der neuen umfassenden und gründlichen Arbeit über diesen Gegenstand in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrgang 1849. November- und December- Heft. S. 230. (m. s. auch Liter. Ber. Nr. LV. S. 768.) veranlasst hat, an die ich bei dieser Gelegenheit von Neuem zu erinnern mir erlauben möchte. Mich selbst haben die Wünsche, die mir bei der Anwendung der fehlerzeigenden Dreiecke stets noch übrig blieben, veranlasst, eine andere Näherungsmethode, die der fehlerzeigenden Dreiecke sich wenigstens nicht unmittelbar bedient, aufzusuchen. Diese Methode hat eine gewisse Aehnlichkeit mit einer schon früher von dem verdienten Bohnenberger in der

Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. Band VI. S. 121. bekannt gemachten Methode. Ich sage aber absichtlich eine gewisse Aehnlichkeit. Denn Bohnenberger bedient sich in der That auch fehlerzeigender Dreiecke, die ich, wenigstens unmittelbar, gar nicht in Anwendung bringe, und die nach meiner Ansicht interessante theoretische Grundlage, von der ich bei meiner Auflösung ausgehe, kennt Bohnenberger gar nicht, so dass also, wie ich glaube, von einer Uebereinstimmung beider Methoden nicht die Rede sein kann, wenn auch allerdings meine Auflösung sehr leicht zu der Bohnenberger'schen Näherungsmethode führt, wie ich weiter unten noch besonders bemerken werde.

II.

Wir wollen uns zwei sich schneidende Kreise (Taf. IV. Fig. 4.) denken. Der eine der beiden Durchschnittspunkte sei A, der andere sei D. Von dem Durchschnittspunkte A aus ziehe man eine gerade Linie, welche den einen der beiden Kreise in b, den anderen in c schneidet. Auf diese gerade Linie wird sich unsere folgende Betrachtung hauptsächlich richten.

Die durch die Mittelpunkte der beiden Kreise gehende gerade Linie nehmen wir als Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, dessen Anfang der Mittelpunkt des einen Kreises ist. Der Halbmesser des Kreises, dessen Mittelpunkt als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist, sei ϱ; der Halbmesser des anderen Kreises sei r. Die erste Coordinate oder sogenannte Abscisse des Mittelpunkts dieses letzteren Kreises sei a, und es wird der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet sein, das Coordinatensystem so anzunehmen, dass a positiv ist. Alles dieses vorausgesetzt, sind nun die Gleichungen der beiden Kreise:

$$x^2+y^2=\varrho^2,\ (x-a)^2+y^2=r^2;$$

und wenn man aus diesen Gleichungen x, y als unbekannte Grössen bestimmt, so erhält man die Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich zuvörderst:

$$x^2+y^2-2ax=r^2-a^2,$$

also wegen der ersten Gleichung:

$$\varrho^2-2ax=r^2-a^2,$$

woraus

$$x=\frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}.$$

Also ist wegen der ersten Gleichung:

$$y^2 = \varrho^2 - x^2 = \varrho^2 - \frac{(a^2 + \varrho^2 - r^2)^2}{4a^2},$$

d. i.

$$y^2 = \frac{4a^2\varrho^2 - (a^2 + \varrho^2 - r^2)^2}{4a^2},$$

woraus man mittelst einer allgemein bekannten Zerlegung auch

$$y^2 = \frac{(a+\varrho+r)(a+\varrho-r)(r+a-\varrho)(\varrho+r-a)}{4a^2}$$

erhält. Bezeichnet man den Flächeninhalt des aus a, ϱ, r als Seiten gebildeten Dreiecks durch Δ, so ist bekanntlich

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(a+\varrho+r)(a+\varrho-r)(r+a-\varrho)(\varrho+r-a),$$

also

$$y^2 = \frac{4\Delta^2}{a^2}, \quad y = \pm\frac{2\Delta}{a};$$

und wir haben daher zur Bestimmung der Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte der beiden Kreise die folgenden Formeln:

$$x = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}, \quad y = \pm\frac{2\Delta}{a}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Coordinaten mit dem oberen Zeichen dem Punkte A, die Coordinaten mit dem unteren Zeichen dem Punkte D entsprechen, so dass also, wenn wir jene Coordinaten durch x_1, y_1; diese durch x_2, y_2 bezeichnen:

$$x_1 = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}, \quad y_1 = +\frac{2\Delta}{a};$$

$$x_2 = \frac{a^2+\varrho^2-r^2}{2a}; \quad y_2 = -\frac{2\Delta}{a}$$

ist.

Die Gleichung der durch den Punkt A oder $(x_1\ y_1)$ gezogenen beliebigen geraden Linie sei jetzt

$$y = Ax + B,$$

so ist, weil diese Linie durch den Punkt $(x_1\ y_1)$ geht,

$$y_1 = Ax_1 + B,$$

und folglich

$$y-y_1=A(x-x_1)$$

die Gleichung dieser Linie.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben ist, durch x, y; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2=\varrho^2,\quad y-y_1=A(x-x_1).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x^2+\{A(x-x_1)+y_1\}^2=\varrho^2,$$

d. i.

$$x^2+\frac{2A(y_1-Ax_1)}{1+A^2}x=\frac{\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2}{1+A^2};$$

und löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung:

$$x=\frac{-A(y_1-Ax_1)\pm\sqrt{(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2}}{1+A^2}.$$

Weil aber der Punkt $(x_1\ y_1)$ in dem mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreise liegt, so ist

$$x_1{}^2+y_1{}^2=\varrho^2,$$

also

$$(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2=(1+A^2)(x_1{}^2+y_1{}^2)-(y_1-Ax_1)^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$(1+A^2)\varrho^2-(y_1-Ax_1)^2=(x_1+Ay_1)^2,$$

folglich nach dem Obigen

$$x=\frac{-A(y_1-Ax_1)\pm(x_1+Ay_1)}{1+A^2}$$

ergiebt. Das obere Zeichen liefert $x=x_1$, und entspricht folglich dem Punkte $(x_1\ y_1)$. Will man also die erste Coordinate oder Abscisse des anderen Durchschnittspunktes unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben ist, haben, so muss man das untere Zeichen nehmen, wodurch man für diesen Durchschnittspunkt

$$x = -\frac{x_1 + Ay_1 + A(y_1 - Ax_1)}{1 + A^2}$$

oder

$$x - x_1 = -\frac{2(x_1 + Ay_1)}{1 + A^2}$$

erhält; und weil nun nach dem Obigen

$$y - y_1 = A(x - x_1)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von x, y die Ausdrücke:

$$x - x_1 = -\frac{2(x_1 + Ay_1)}{1 + A^2},\quad y - y_1 = -\frac{2A(x_1 + Ay_1)}{1 + A^2}.$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten der Durchschnittspunkte unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, wieder durch x, y selbst; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2,\quad y - y_1 = A(x - x_1).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$(x-a)^2 + \{A(x - x_1) + y_1\}^2 = r^2,$$

d. i.

$$x^2 + 2\frac{A(y_1 - Ax_1) - a}{1 + A^2}x = \frac{r^2 - a^2 - (y_1 - Ax_1)^2}{1 + A^2};$$

und löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art auf, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung:

$$x = \frac{-\{A(y_1 - Ax_1) - a\} \pm \sqrt{(1 + A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2}}{1 + A^2}.$$

Weil aber der Punkt $(x_1\ y_1)$ in dem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise liegt, so ist

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2,$$

also

$$(1+A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2 = (1+A^2)\{(x_1-a)^2 + y_1^2\} - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$(1 + A^2)r^2 - \{y_1 - A(x_1 - a)\}^2 = (x_1 - a + Ay_1)^2,$$

folglich nach dem Obigen

$$x = \frac{-\{A(y_1 - Ax_1) - a\} \pm \{(x_1 + Ay_1) - a\}}{1 + A^2}$$

ergiebt. Das obere Zeichen liefert $x = x_1$, und entspricht folglich dem Punkte $(x_1\ y_1)$. Will man also die erste Coordinate oder Abscisse des anderen Durchschnittspunkts unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, haben, so muss man das untere Zeichen nehmen, wodurch man für diesen Durchschnittspunkt

$$x = -\frac{\{A(y_1 - Ax_1) - a\} + \{(x_1 + Ay_1) - a\}}{1 + A^2}$$

oder

$$x - x_1 = \frac{2\{a - (x_1 + Ay_1)\}}{1 + A^2}$$

erhält; und weil nun nach dem Obigen

$$y - y_1 = A(x - x_1)$$

ist, so hat man zur Bestimmung von x, y die Ausdrücke:

$$x - x_1 = \frac{2\{a - (x_1 + Ay_1)\}}{1 + A^2},\ y - y_1 = \frac{2A\{a - (x_1 + Ay_1)\}}{1 + A^2}.$$

Ist jetzt jetzt b in Taf. IV. Fig. 4. der Durchschnittspunkt unserer geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser ϱ beschrieben worden ist, dagegen c in derselben Figur der Durchschnittspunkt dieser geraden Linie mit dem Kreise, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben worden ist, und bezeichnen wir die Coordinaten dieser beiden Punkte respective durch x_b, y_b und x_c, y_c; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$x_b - x_1 = -\frac{2(x_1 + Ay_1)}{1 + A^2},\ y_b - y_1 = -\frac{2A(x_1 + Ay_1)}{1 + A^2}$$

und

$$x_c - x_1 = \frac{2\{a - (x_1 + Ay_1)\}}{1 + A^2},\ y_c - y_1 = \frac{2A\{a - (x_1 + Ay_1)\}}{1 + A^2}.$$

Also ist

$$x_b - x_c = -\frac{2a}{1 + A^2},\ y_b - y_c = -\frac{2Aa}{1 + A^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der beiden Punkte b und c oder $(x_b\ y_b)$ und $(x_c\ y_c)$ von einander, d. i. die Linie bc in Taf. IV. Fig. 4., durch E, so ist

$$E^2 = (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2,$$

d. i. nach dem Obigen

$$E^2=\frac{4a^2}{1+A^2},$$

folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen bekanntlich a positiv ist:

$$E=\frac{2a}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Von dem Punkte D oder $(x_2\, y_2)$ wollen wir uns jetzt auf die durch den Punkt A oder $(x_1\, y_1)$ gelegte gerade Linie ein Perpendikel gefällt denken, und die Länge dieses Perpendikels durch P, die Coordinaten seines Fusspunktes in der in Rede stehenden Linie aber durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen. Die Gleichung dieses Perpendikels ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2),$$

und zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ hat man daher die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{y}-y_1=A(\mathfrak{x}-x_1),$$
$$\mathfrak{y}-y_2=-\frac{1}{A}(\mathfrak{x}-x_2);$$

oder

$$\mathfrak{y}-y_1=A(\mathfrak{x}-x_1),$$
$$\mathfrak{y}-y_1+(y_1-y_2)=-\frac{1}{A}\{\mathfrak{x}-x_1+(x_1-x_2)\};$$

oder auch

$$\mathfrak{y}-y_2-(y_1-y_2)=A\{\mathfrak{x}-x_2-(x_1-x_2)\},$$
$$\mathfrak{y}-y_2=-\frac{1}{A}(\mathfrak{x}-x_2).$$

Weil aber nach dem Obigen

$$x_1-x_2=0,\ y_1-y_2=\frac{4\Delta}{a}$$

ist; so werden diese Gleichungen:

$$\mathfrak{y}-y_1=A(\mathfrak{x}-x_1),$$
$$\mathfrak{y}-y_1+\frac{4\Delta}{a}=-\frac{1}{A}(\mathfrak{x}-x_1);$$

und

$$\mathfrak{y}-y_2-\frac{4\Delta}{a}=A(\mathfrak{x}-x_2),$$

$$y-y_2=-\frac{1}{A}(x-x_2).$$

Also ist

$$1+\frac{4\Delta}{a(y-y_1)}=-\frac{1}{A^2},$$

$$1-\frac{4\Delta}{a(y-y_2)}=-A^2;$$

folglich

$$y-y_1=-\frac{4A^2\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_2=\frac{4\Delta}{a(1+A^2)}.$$

Also ist

$$x-x_1=-\frac{4A\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_1=-\frac{4A^2\Delta}{a(1+A^2)}$$

und

$$x-x_2=-\frac{4A\Delta}{a(1+A^2)},\quad y-y_2=\frac{4\Delta}{a(1+A^2)}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Fusspunktes des Perpendikels P von dem Punkte A oder $(x_1\ y_1)$ durch Q; so ist

$$Q^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\quad P^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2;$$

also nach dem Obigen, wie man leicht findet,

$$Q^2=\frac{16A^2\Delta^2}{a^2(1+A^2)},\quad P^2=\frac{16\Delta^2}{a^2(1+A^2)};$$

woraus

$$Q=\pm\frac{4A\Delta}{a\sqrt{1+A^2}},\quad P=\frac{4\Delta}{a\sqrt{1+A^2}};$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse A positiv oder negativ ist.

Weil nun nach dem Obigen

$$E=\frac{2a}{\sqrt{1+A^2}}$$

st, so ist

$$\frac{E}{P}=\frac{a^2}{2\Delta},$$

und daher dieses Verhältniss ein von der Lage der durch den Punkt A oder $(x_1\ y_1)$ gezogenen geraden Linie unabhängiges, insofern also constantes Verhältniss, was unmittelbar zu dem folgenden geometrischen Satze führt:

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise sich schneiden, und man von dem einen ihrer beiden Durchschnittspunkte aus eine, jeden der beiden Kreise ein zweites Mal schneidende gerade Linie zieht, so ist das Verhältniss zwischen der Entfernung der zwei Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit den beiden Kreisen von einander und dem von dem anderen Durchschnittspunkte der beiden Kreise auf die in Rede stehende gerade Linie gefällten Perpendikel von der Lage der geraden Linie unabhängig, und insofern also ein constantes Verhältniss.

Dies ist der Satz, von dem wir im Folgenden eine Anwendung auf das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische machen werden. Vorher wollen wir jedoch die folgenden geometrischen Bemerkungen dem Vorhergehenden noch beifügen.

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$E^2=\frac{4a^2}{1+A^2},\quad Q^2=\frac{16A^2\Delta^2}{a^2(1+A^2)}$$

die Grösse A^2 eliminirt, so erhält man die Relation

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{a^4}{4\Delta^2};$$

und da nun nach dem Obigen

$$\frac{E^2}{P^2}=\frac{a^4}{4\Delta^2}$$

ist, so ist

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{E^2}{P^2},$$

woraus sich die bemerkenswerthe Relation

$$4a^2P^2=E^2(P^2+Q^2)$$

oder

$$a=\frac{E\sqrt{P^2+Q^2}}{2P}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise durch S, so ist

$$S^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

also nach dem Obigen

$$S^2=(y_1-y_2)^2=\frac{16\Delta^2}{a^2},$$

folglich

$$S=\frac{4\Delta}{a}.$$

Daher ist

$$\frac{2\Delta}{a^2}=\frac{S}{2a},\quad \frac{a^2}{2\Delta}=\frac{2a}{S};$$

also nach dem Obigen

$$\frac{E}{P}=\frac{2a}{S}$$

oder

$$E:P=2a:S,$$

welche Proportion ein Jeder sogleich wird in Worten aussprechen können.

Auch ist

$$\frac{a^4}{4\Delta^2}=\frac{4a^2}{S^2},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{4a^2-E^2}{Q^2}=\frac{4a^2}{S^2},$$

woraus sich

$$E^2S^2=4a^2(S^2-Q^2),$$

oder

$$a=\frac{ES}{2\sqrt{S^2-Q^2}}$$

ergiebt.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so erhält man

$$\frac{ES}{2\sqrt{S^2-Q^2}}=\frac{E\sqrt{P^2+Q^2}}{2P}$$

oder

$$PS=\sqrt{P^2+Q^2}.\sqrt{S^2-Q^2},$$

woraus sich leicht die nach dem pythagoräischen Lehrsatze sich von selbst verstehende Gleichung

$$S^2=P^2+Q^2$$

ergiebt.

Es würden sich leicht aus dem Obigen noch manche andere Relationen ableiten lassen, da es ja bekannt genug ist, dass sich bei Untersuchungen wie die vorhergehende immer eine grosse Menge mehr oder weniger merkwürdiger Relationen ergeben, deren Ableitung oft nur ein geringes Verdienst ist, aber dessenungeachtet als ein treffliches Uebungsmittel für Anfänger jederzeit einen grossen Werth hat. Ich will mich aber bei solchen geometrischen Uebungen, die nur den grossen, ja unermesslichen Reichthum der Geometrie zu zeigen geeignet sind, jetzt nicht länger aufhalten, sondern nun sogleich zu dem wichtigen praktischen Gegenstande übergehen, welchem das Obige zur Vorbereitung und Grundlage dienen sollte. Eine elementar-geometrische Darstellung des obigen Gegenstandes, bei dessen Entwickelung ich mich hier absichtlich der analytischen Geometrie bedient habe, von befreundeter Hand, mit noch manchen anderen Bemerkungen, werde ich den Lesern des Archivs vielleicht bald mitzutheilen im Stande sein.

III.

In Taf. IV. Fig. 5. seien jetzt A, B, C die drei auf dem Messtische gegebenen, den Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ auf dem Felde entsprechenden Punkte, und D sei der auf dem Messtische zu findende vierte, dem Punkte 𝔇 auf dem Felde, in welchem der Messtisch aufgestellt worden ist, entsprechende Punkt. Die gegenseitige Lage der drei Punkte 𝔄, 𝔅, ℭ auf dem Felde sei eine solche, dass dem in 𝔇 stehenden, mit dem Gesicht nach 𝔄 gekehrten Beobachter, der Punkt 𝔄 zwischen den Punkten 𝔅 und ℭ liegend erscheint. Zugleich denke man sich auf dem Mess-

tische die beiden bekannten, durch A, B, D und durch A, C, D gehenden Kreise beschrieben, was Alles so allgemein bekannt ist, dass es hier noch weiter zu erläutern ganz unzweckmässig und unnöthig sein würde. Eine beliebige durch A gezogene gerade Linie schneide den Kreis, in welchem B liegt, in b, den Kreis, in welchem C liegt, in c. Praktisch erhält man zwei Punkte wie b und c sehr leicht, wenn man bei ganz beliebiger Lage des Tischblattes die Kippregel an A legt und nach $\mathfrak{A}$ visirt, dann die Kippregel an B legt und nach $\mathfrak{B}$ visirt, und den Durchschnittspunkt der beiden auf diese Weise erhaltenen Visirlinien bestimmt, was einen Punkt b giebt; dann legt man, natürlich bei ganz unverrückter Lage des Tisches, die Kippregel auch an C, visirt nach $\mathfrak{C}$, und bestimmt den Durchschnittspunkt dieser Visirlinie mit der schon vorher erhaltenen durch A gehenden Visirlinie, so giebt dies einen Punkt c. Der Grund dieses einfachen Verfahrens erhellet auf der Stelle, wenn man nur überlegt, dass die Winkel AbB und AcC auf dem Tische respective den Winkeln $\mathfrak{ADB}$ und $\mathfrak{ADC}$ auf dem Felde, denen bekanntlich auch die Winkel ADB und ADC auf dem Tische gleich sind, mit einer hier völlig ausreichenden Genauigkeit gleich sind, wenigstens bei Entfernungen der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von dem in $\mathfrak{D}$ aufgestellten Tische, welche gegen die Dimensionen des Tisches als verschwindend betrachtet werden können. Auf diese Weise kann man sich also immer leicht und mit der grössten Sauberkeit zwei Punkte wie b und c verschaffen. Die Visirlinien, welche diese Punkte geben, wird man nie völlig ausziehen, da es zunächst nur auf die Bestimmung zweier solcher Punkte wie b und c selbst ankommt.

Grösserer Einfachheit wegen wollen wir im Folgenden, was in der Praxis gewiss immer verstattet sein wird, annehmen, dass bei der Bestimmung der Punkte b und c nach dem vorhergehenden Verfahren der Messtisch schon so weit orientirt sei, dass diese Punkte beide auf e i n e r Seite des Punktes A liegen, dieser letztere Punkt also nicht zwischen jenen beiden Punkten liegt, wenn auch, theoretisch genommen, die Betrachtung des Falls, wo A zwischen b und c liegt, keiner besonderen Schwierigkeit unterliegen würde, was wir aber füglich dem Leser überlassen können. Dies vorausgesetzt, wollen wir im Folgenden, wenn zwei Paare von Punkten wie b, c, die wir durch b, c und b', c' bezeichnen wollen, auf dem Messtische gegeben sind, diese beiden Paare bc und $b'c'$ s y m m e t r i s c h oder u n s y m m e t r i s c h gegen A liegend nennen, jenachdem mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$Ab \gtrless Ac, \quad Ab' \gtrless Ac'$$

oder

$$Ab \gtrless Ac, \quad Ab' \lessgtr Ac'$$

ist, was sich bei praktischen Operationen immer auf der Stelle wird erkennen lassen.

Wenn man die oben beschriebene Operation bei zwei verschiedenen Lagen des Tischblattes vornimmt, so kann man sich leicht zwei solche Paare von Punkten wie *bc* und *b'c'* verschaffen, und dass dies geschehen sei, wollen wir von nun an voraussetzen. Dies aber vorausgesetzt, erhellet aus einer blossen Betrachtung von Taf. IV. Fig. 5. auf der Stelle, dass, jenachdem die beiden Paare *bc* und *b'c'* gegen *A* symmetrisch oder unsymmetrisch liegen, der gesuchte Punkt *D* nicht zwischen den beiden, natürlich stets gehörig verlängert gedachten Linien *bc* und *b'c'*, oder zwischen diesen beiden stets gehörig verlängert gedachten Linien liegt. Hat sich aber aus einer nach den vorhergehenden Regeln äusserst leicht anzustellenden Beurtheilung ergeben, dass der gesuchte Punkt *D* nicht zwischen den beiden immer gehörig verlängert gedachten Linien *bc* und *b'c'* liegt, und daher auf einer und derselben Seite dieser beiden Linien gesucht werden muss, so erhellet sowohl aus einer blossen Betrachtung von Taf. IV. Fig. 5., als auch aus dem in II. bewiesenen geometrischen Lehrsatze, nach welchem die von dem Punkte *D* auf die Linien *bc* und *b'c'* gefällten Perpendikel zu diesen Linien selbst ein und dasselbe constante Verhältniss haben, dass der Punkt *D* immer auf der Seite der kleineren der beiden Linien *bc* und *b'c'* gesucht werden muss, auf welcher die grössere dieser beiden Linien nicht liegt.

Denken wir uns jetzt durch die beiden Punkte *A* und *D* eine gerade Linie gezogen, so erhellet durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle, dass die beiden von einem jeden ganz beliebigen Punkte in dieser Linie auf die gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel in demselben Verhältnisse zu einander stehen wie die beiden von dem Punkte *D* auf die gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel. Also werden nach dem in II. bewiesenen geometrischen Lehrsatze die beiden von einem ganz beliebigen Punkte in der durch *A* und *D* gehenden geraden Linie auf die beiden gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* gefällten Perpendikel sich jederzeit eben so zu einander verhalten, wie beziehungsweise die beiden Linien *ab* und *a'b'* sich selbst zu einander verhalten; und bestimmt man also, nachdem man nach dem Vorhergehenden die Lage des Punktes *D*, und demnach auch überhaupt die Lage der Linie *AD*, gegen die beiden gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* bereits ermittelt hat, entweder nach dem Augenmaasse oder durch genaue geometrische Construction einen Punkt auf dem Messtische so, dass dessen Entfernungen von den gehörig verlängert gedachten Linien *ab* und *a'b'* sich eben so zu einander verhalten, wie beziehungsweise die Linien *ab* und *a'b'* sich selbst zu einander verhalten, so wird der auf diese Weise erhaltene Punkt ein Punkt in der durch *A* und *D* gehenden geraden Linie sein. Legt man also dann die Kippregel an diesen Punkt und an den Punkt *A* an, und orientirt hierauf das Tischblatt nach 𝔄, so wird dasselbe richtig orientirt sein, und dann also auch ferner der Punkt *D* selbst leicht erhalten werden können, wenn man nur die Kippregel an *B* oder *C* legt, und respective nach 𝔅 oder ℭ visirt, was allgemein genug bekannt ist, als dass es hier noch einer weiteren Ausführung bedürfte.

Man kann, wenn es der Raum auf dem Tischblatte zulässt und es überhaupt als zweckmässig erscheint, worüber sich im Allgemeinen nichts festsetzen lässt, den in Rede stehenden Punkt auf dem Tische auch so bestimmen, dass seine Entfernungen von den gehörig verlängert gedachten Linien ab und $a'b'$ diesen beiden Linien ab und $a'b'$ beziehungsweise gleich sind.

Ein hinreichend geübtes Augenmaass wird, glaube ich, bei der Bestimmung des in Rede stehenden Punktes meistens ausreichen; aber auch wenn man sich darauf nicht verlassen wollte oder könnte, würde dieser Punkt stets durch eine genaue geometrische Construction erhalten werden können, die in der Ausführung so leicht und einfach ist, dass man wohl noch wagen darf, sie den bei Messtischoperationen auf dem Felde beschäftigten praktischen Geometern aufzubürden. Man braucht ja bloss auf den gehörigen Seiten der Linien ab und $a'b'$ in Entfernungen von denselben, die entweder diesen Linien selbst, oder gewissen, mittelst des Zirkels zu bestimmenden, gleichvielten aliquoten Theilen, oder endlich auch gewissen Gleichvielfachen derselben gleich sind, mit Hülfe von Lineal und Dreieck mit den Linien ab und $a'b'$ zwei Parallellinien zu ziehen und deren Durchschnittspunkt zu bestimmen, welcher der gesuchte, zur richtigen Orientirung des Tisches erforderliche Punkt sein wird. Jedoch wird, wie gesagt, gewiss in den meisten Fällen ein geübtes Augenmaass ausreichen, wenn man namentlich die vorhergehende Methode als eine successive Annäherungsmethode betrachtet, die nur erst nach einigen Wiederholungen zu einer vollständig richtigen Orientirung des Tisches führt. Auch werden noch manche Vortheile jedem in der Anwendung des Rückwärtseinschneidens schon geübten Praktiker sich gewiss ganz von selbst ergeben.

Wenn die Linien bc und $b'c'$ sich beide auf einen Punkt zusammenziehen, so wird dies jederzeit ein sicheres Zeichen sein, dass die vier Punkte A, B, C, D auf einer und derselben Kreisperipherie liegen, und daher die Aufgabe eine unbestimmte ist*). Zöge sich dagegen nur die eine der beiden Linien bc und $b'c'$ auf einen Punkt zusammen, so würde eben dieser Punkt der gesuchte Punkt D, und eine weitere Fortsetzung der Operation daher nicht nöthig sein.

Wenn man die Linien bc und $b'c'$ näherungsweise als einander parallel anzusehen sich berechtigt halten darf, und dieselben symmetrisch gegen den Punkt A liegen, so erhellet mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung aus dem Obigen sogleich, dass der Durchschnittspunkt der gehörig verlängerten Linien bb' und cc' näherungsweise der oben angegebenen Bedingung

---

*) Da nämlich bc und $b'c'$ jetzt Punkte sind, die wir durch (bc) und $(b'c')$ bezeichnen wollen, so geht der durch A, B, D beschriebene Kreis durch die Punkte A, B, D, (bc), $(b'c')$, der durch A, C, D beschriebene Kreis durch die Punkte A, C, D, (bc), $(b'c')$. Also gehen beide Kreise durch dieselben vier Punkte A, D (bc), $(b'c')$, und fallen daher mit einander zusammen.

rücksichtlich seiner Entfernungen von den Linien bc und $b'c'$ genügen wird, und daher zur näherungsweisen Orientirung des Messtisches in der oben angegebenen Weise benutzt werden kann. Können dagegen die Linien bc und $b'c'$ näherungsweise als einander parallel betrachtet werden, und liegen unsymmetrisch gegen den Punkt A, so erhellet eben so leicht wie vorher, dass wieder der Durchschnittspunkt der beiden Linien bb' und cc' zur näherungsweisen Orientirung des Messtisches benutzt werden kann. Wie es nach dem Obigen bekanntlich erforderlich ist, liegt der Durchschnittspunkt der beiden Linien bb' und cc' im ersten Falle nicht zwischen den beiden Linien bc und $b'c'$, im zweiten Falle dagegen zwischen diesen beiden Linien. Dies ist eigentlich im Wesentlichen die oben erwähnte, von Bohnenberger angegebene Näherungsmethode, die, wie es uns scheint, in der von uns oben entwickelten genauen Methode ihren wahren Grund hat.

Ueber die obige Methode uns noch weiter zu verbreiten, oder dieselbe, wie vielleicht mancher Praktiker wünschen möchte, für den praktischen Gebrauch hier nochmals im Zusammenhange darzustellen, halten wir für unnöthig. Auch wird der wahre, theoretisch gehörig gebildete Praktiker gewiss selbst leicht noch auf manche erweiterte Anwendungen unserer Methode kommen. Ich erwähne daher nur noch zum Schluss, dass ich die in II. gegebenen Entwickelungen hier absichtlich auf demselben Wege gegeben habe, welcher mich zu denselben geführt hat, nämlich im Gewande der analytischen Geometrie. Vielleicht ist eine einfache elementare Darstellung durch die synthetische Geometrie möglich, der ich, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte haben sollte*), gern einen Platz im Archive einräumen würde, und daher die Leser dieser Zeitschrift zu einer desfallsigen Untersuchung aufzufordern mir erlauben möchte, weil ich allerdings der Meinung bin, dass die aus den in II. angestellten theoretischen Betrachtungen in III. hergeleitete praktische Methode des Rückwärtseinschneidens mit dem Messtische ihrer Einfachheit wegen wohl verdient, dass sie durch eine hinreichend elementare und leichte theoretische Betrachtung auch in ihren Gründen einer möglichst grossen Anzahl von Praktikern zugänglich gemacht werde.

*) Dass dazu Hoffnung vorhanden ist, habe ich oben schon bemerkt.

XX.

Ueber eine neue Art, die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in optisch zweiaxigen Medien darzustellen.

Von

Herrn Dr. Beer,

Privatdocenten an der Universität zu Bonn.

Das Bedürfniss von Modellen bei dem Studium der Doppel-Brechung hat sich unter Anderem durch die Erfindung verschiedener Darstellungs-Arten der Wellenfläche optisch zweiaxiger Krystalle bekundet. Unter diesen sind als die vollkommensten diejenigen Modelle zu betrachten, welche sich nach den wichtigsten Schnitten jener Fläche aus einander schlagen lassen, und deren Masse den zwischen den beiden Schalen der Fläche befindlichen Raum ausfüllt, so dass sie in ihrer Convexität und Concavität eine vollständie Vorstellung der Wellenform vermitteln. Eine andere Art besteht aus zwei Theilen, von denen der eine durch die innere Schale oder durch einen Theil derselben, z. B. einen Octanten, und durch die Hauptschnitte, der andere durch die äussere Schale begrenzt wird. Noch einfacher ist die Darstellung mittelst Platten von Pappe, auf denen Schnitte der Fläche gezeichnet sind, oder mittelst Drähten, die den Umfang solcher Schnitte angeben. Dieser Aufsatz ist der Angabe einer neuen Art, die Gesetze der Fortpflanzung und Polarisation des Lichtes in doppelbrechenden Mitteln sowohl mittelst eines leicht herzustellenden Modelles, als auch mittelst der Zeichnung darzustellen, gewidmet. Wir schicken der Beschreibung einige begründende mathematische Betrachtungen voraus.

1. Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, mit welchen sich zwei parallele ebene Wellen in einem optisch zweiaxigen Mittel nach der Richtung ihrer gemeinsamen Normale fortpflanzen, werden bekanntlich aus folgenden Gleichungen gefunden:

$$1)\quad v_1^2 = s + t\cos(u_1 + u_2), \qquad 2)\quad v_2^2 = s + t\cos(u_1 - u_2).$$

Legen wir in Taf. V. Fig. 1. durch einen Punkt O als Mittelpunkt zwei Gerade A_1A_1' und A_2A_2' nach den Richtungen der beiden optischen Axen für ebene Wellen (der wahren optischen Axen), so bedeuten u_1 und u_2 die Winkel, welche eine durch O mit der gemeinsamen Normale der beiden Fronten parallel gelegte gerade Linie ON bezüglich mit OA_1 und OA_2 bildet; der Werth von s ist immer positiv, während t, absolut genommen kleiner als s, positiv wird, wenn die Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2 mit der Axe der kleinsten Elasticität, und negativ wird, wenn sie mit der Axe der grössten Elasticität zusammenfällt. Die Schwingungen der Wellen-Front, deren Geschwindigkeit v_1 ist, stehen auf ON senkrecht und liegen in einer Ebene, welche durch ON gehend, den Winkel N des körperlichen Dreiecks A_1NA_2 halbirt. Die Schwingungen der zweiten Welle stehen auf denen der ersten senkrecht und liegen wie jene in der Wellen-Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welcher von der Normale ON und der Linie OA'_2 eingeschlossen wird, durch u_2', so wird $u_2 + u_2' = 180^0$, und an die Stelle der Gleichung 2) können wir die folgende treten lassen:

$$2')\quad v_2^2 = s - t\cos(u_1 + u_2').$$

Der Ort der Normalen nun, für welche v_1 denselben Werth besitzt, d. i. der Normalen, deren erste Wellen-Ebenen sich mit gleicher Geschwindigkeit in dem krystallinischen Mittel fortpflanzen, ist offenbar ein Kegel des zweiten Grades, dessen Spitze in O liegt, dessen Axe mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2 coincidirt, und dessen Brenn-Linien die optischen Axen A_1A_1' und $A_2A'_2$ sind. Ebenso bildet andererseits die stetige Aufeinanderfolge der Normalen, deren zweite Wellen-Fronten sich mit derselben Geschwindigkeit v_2 fortbewegen, einen elliptischen Kegel, dessen Mittelpunkt O ist, dessen Haupt-Axe den Winke- A_1OA_2' halbirt, und dessen Focal-Linien die Geraden A_1A_1' und A_2A_2' sind. Die beiden erwähnten Kegel sind hiernach confocal und stehen mit ihren Hauptaxen auf einander senkrecht. Einem jeden anderen Werthe von v_1 und v_2 entspricht ein anderer Kegel der ersten und der zweiten Art; wir erhalten also zwei Gruppen confocaler Kegelflächen, die wir Geschwindigkeits-Kegel nennen wollen. Die Entwicklung der Gleichungen dieser Kegel ist leicht; es handle sich z. B. um die Herstellung der Gleichung für die Kegel der ersten Gruppe. Wir lassen die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinaten-Systemes mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2, die x-Axe mit der Halbirungs-Linie des Winkels A_1OA_2' zusammenfallen; es kommt alsdann die y-Axe auf die Ebene der optischen Axen senkrecht zu stehen. Da nun für sämmtliche Seiten eines Kegels der ersten Gruppe als Normale ebener Wellen

v_1^2 denselben Werth behalten soll, so hat man, unter l eine die Rolle des Parameters spielende Constante verstanden, die kleiner als $\cos A_1 OA_2$ ist,

$$\cos(u_1 + u_2) = l,$$

woraus sich ergibt:

$$\cos u_1^2 + \cos u_2^2 - 2l.\cos u_1 \cos u_2 = 1 - l^2.$$

Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes des Kegels vom Anfangs-Punkte O durch r, seine Coordinaten durch x, y und z, sowie den Winkel $A_1 OA_2$ durch $2n$, so ist, wie leicht einzusehen,

$$\cos u_1 = \frac{x}{r} \cdot \sin n + \frac{z}{r} \cdot \cos n, \cos u_2 = -\frac{x}{r} \cdot \sin n + \frac{z}{r} \cdot \cos n.$$

Hieraus und aus der so eben gefundenen Relation zwischen $\cos u_1$ und $\cos u_2$ ergibt sich für die Gleichung des Kegels vom Parameter l die folgende:

$$K_1 \equiv -x^2(1+l)(\cos 2n - l) - y^2(1-l^2) + z^2(1-l)(\cos 2n - l) = 0.$$

Auf ganz demselben Wege findet man die folgende Gleichung der zweiten Gruppe der Geschwindigkeits-Kegel:

$$K_2 \equiv x^2(1-l)(\cos 2n + l) + y^2(1-l^2) - z^2(1+l)(\cos 2n + l) = 0.$$

Es ist hier l immer negativ und kleiner als $-\cos 2n$ zu nehmen; aber weder für die Kegel K_1, noch für K_2 darf der Grösse l als einem Cosinus ein Werth beigelegt werden, der, absolüt genommen, die Einheit übersteigt.

Die Hauptaxe der Kegel K_1 fällt ersichtlich mit der z-Axe zusammen, halbirt also den Winkel $A_1 OA_2$, während die der Kegel K_2 den Winkel $A_1 OA_2'$ in zwei gleiche Theile theilt. Dass sämmtliche Kegel die optischen Axen als Focal-Linien besitzen, geht aus dem Umstande hervor, dass die Summe der Winkel, den eine Seite der Kegel mit jenen Geraden einschliesst, für denselben Kegel eine constante Grösse behält. Für die erste Gruppe besteht ein Grenz-Kegel, derjenige nämlich, dessen Parameter l den Werth $\cos 2n$ hat, in den Stücken $A_1 OA_2$ und $A_1' OA_2'$ der Ebene xz; die andere Grenze ist die Ebene xy; dieser entspricht als Parameter $l = -1$. Die Grenzen der Kegel K_2 sind die Stücke $A_1 OA_2'$ und $A_2 OA_1'$ der Ebene der optischen Axen, für $l = -\cos 2n$, und der Hauptschnitt yz, für $l = -1$.

2. Wir wollen annehmen, es sei die Halbirungs-Linie des Winkels $A_1 OA_2$ die Axe der kleinsten optischen Elasticität, alsdann ergibt sich für die erste Grenze der Kegel K_1 das Quadrat der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit $v_1^2 = s + t \cos 2n$. Dasselbe nimmt an Grösse für die folgenden Kegel immer mehr ab und erreicht an der zweiten Grenze den Minimums-Werth $s - t$. Die dem ersten Grenz-Kegel der zweiten Gruppe entsprechende Ge-

schwindigkeit wird bestimmt durch die Gleichung $v_2^2 = s + t\cos 2n$; sie wächst, während sich die Geschwindigkeits-Kegel erweitern, und ihr Quadrat nähert sich dem Maximum $s+t$, welches an der zweiten Grenze erreicht wird. Alles dies gilt, abgesehen davon, ob der Winkel A_1OA_2 spitz oder stumpf oder ein Rechter ist, also für positive und negative Krystalle und für den Uebergangsfall, in welchem die beiden optischen Axen auf einander senkrecht stehen.

Aus den in 1. gemachten Bemerkungen über die Oscillations-Ebene der Wellen folgt, dass die Schwingungen, welche einem Geschwindigkeits-Kegel entsprechen, nach den Richtungen seiner Normalen vor sich gehen.

3. Fallen die beiden optischen Axen A_1A_1' und A_2A_2' in die z-Axe, diese immer als Axe der kleinsten Elasticität gedacht, so ist das Mittel optisch einaxig und positiv. Es kann alsdann von der zweiten Gruppe der Geschwindigkeits-Kegel nicht mehr die Rede sein; v_2^2 behält den constanten Werth $s+t$ und entspricht den ordentlichen Wellen, deren Schwingungsrichtungen auf der einzigen optischen Axe senkrecht stehen. Die Gleichung der Kegel K_1 gestaltet sich nun in:

$$(x^2+y^2)(1+l)-z^2(1-l)=0.$$

Die Kegel K_1 gehen in Rotations-Kegel über, deren Axen mit der optischen Axe zusammenfallen. Für den einen Grenzkegel, welcher hier die optische Axe ist, erlangt auch v_1^2 den Werth $s+t$. Indem sich die Kegel öffnen, wird es kleiner und erreicht an der zweiten Grenze, in dem auf der Axe senkrechten Hauptschnitte, das Minimum $s-t$.

Wir überheben uns der Betrachtung des Falles, wo beide Axen A_1A_1' und A_2A_2' in die x-Axe fallen, da dann das Mittel in ein optisch einaxiges negatives übergeht.

4. Die in den vorhergehenden Nummern mitgetheilten Betrachtungen über die Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten und Oscillations-Ebenen der Wellen-Fronten übertragen sich ohne Weiteres auf dieselben Attribute der Licht-Strahlen, wenn wir an die Stelle der wahren optischen Axen die scheinbaren, an die Stelle der Normale einer Lichtwelle die Richtung des Strahles treten lassen. Wir erhalten, dem Früheren analog, Geschwindigkeits-Kegel des zweiten Grades, deren Brennlinien die scheinbaren optischen Axen (die optischen Axen für Strahlen) sind, und die den einzelnen Seiten eines solchen Kegels entsprechende Oscillations-Ebene ist eine Normal-Ebene dieser Fläche.

5. Um O als Mittelpunkt werde eine Kugel S von dem Radius 1 gelegt. Diese Kugel wird von den Geschwindigkeits-Kegeln K_1 für ebene Wellen in zwei Gruppen confocaler sphärischer Ellipsen E_1 geschnitten, deren gemeinsame doppelte Excentricitäten bezüglich die Bogen A_1A_2 und $A_1'A_2'$ grösster Kreise sind. Zwei andere Gruppen solcher sphärischer Linien E_2 erhalten wir als Durchschnitte der Kugel S und der Kegel K_2; die

gemeinsamen Brennpunkte derselben sind einerseits A_1 und A_2', andererseits A_2 und A_1'. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$K_1 \equiv \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

so ist:

$$K_2 \equiv -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

wo man dann hat:

$$\gamma^2 > \alpha^2 > \beta^2.$$

Die Projectionen der Curven E_1 und E_2 auf die drei Hauptschnitte werden nun durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$E_1 \begin{cases} x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}, \\ x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{\beta^2}, \\ y^2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha^2}; \end{cases}$$

$$E_2 \begin{cases} -x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) = -\frac{1}{\gamma^2}, \\ -x^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{\beta^2}, \\ y^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Wir ersehen hieraus:

Erstens, dass die Projectionen der Geschwindigkeits-Curven (so nämlich wollen wir die sphärischen Ellipsen nennen) auf die Ebene der optischen Axen (die Ebene xz) in zwei Reihen von Ellipsen bestehen, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen, und die den Schnitt xz der Kugel im Allgemeinen schneiden. Die eine Grenz-Curve der ersten Reihe, welche den Curven E_1 entspricht, ist die Axe der x, die andere Grenz-Curve der Schnitt xz der Kugel. Sämmtliche Durchschnitts-Punkte dieser Curven und des Schnittes xz der Kugel sind auf den Kreis-Bogen A_1A_2' und A_2A_1' befindlich. Die erste Grenze der zweiten Reihe, die zu den Curven E_2 gehört, ist die z-Axe, die zweite wiederum der Schnitt xz der Kugel; die Durchschnitte dieser Ellipsen und der Kugel liegen auf den Kreis-Bogen A_1A_2 und $A_1'A_2'$.

Zweitens. Die Projectionen der Geschwindigkeits-Curven auf die Ebene xy bestehen erstlich aus einem System von Ellipsen, die, einander umschliessend, zu Grenzen haben einerseits den Kreis, in welchem die Kugel von der Projections Ebene geschnitten wird, andererseits die Verbindungslinie der Projectionen α_1 und α_2 der Brennpunkte der sphärischen Ellipsen (der Durchschnittspunkte der optischen Axen und der Kugel S). Diese Ellipsen entsprechen den Curven E_1; ihre Axen fallen mit den Coordinaten-Axen zusammen. Der Gruppe E_2 entspricht ein System von Hyperbeln, deren reelle Axe in die x-Axe fällt, und deren eine Grenze die y-Axe, deren andere die über α_1 und α_2 hinaus gelegenen Theile der x-Axe sind.

Drittens. Die Curven E_1 stellen sich in ihren Projectionen auf die Ebene yz als Hyperbeln dar, deren reelle Axen mit der z-Axe zusammenfallen. Die Grenzen derselben sind die über β_1 und β_2, den Projectionen der Brennpunkte der sphärischen Ellipsen, hinausgelegenen Theile der z-Axe und die y-Axe. Die Curven E_2 endlich projiciren sich als Ellipsen mit gleich gerichteten Axen, deren Grenzen der Schnitt yz der Kugel und das Stück $\beta_1\beta_2$ der z-Axe sind.

6. Die gewonnenen Resultate liefern uns nun folgende neue Darstellungsart der Gesetze, nach welchen die Licht-Bewegung in doppelbrechenden Körpern vor sich geht. Auf eine Kugel tragen wir die Durchschnitte A_1, A_2, A_1' und A_2' der optischen Axen auf und beschreiben auf derselben eine Anzahl der sphärischen Ellipsen E_1 und E_2, deren Brennpunkte in A_1 und A_2, sowie in A_1 und A_2' liegen. Die Operation bei der Zeichnung dieser Curven ist durchaus gleichlaufend mit derjenigen, welche man bei dem Zeichnen ebener Ellipsen vorzunehmen hat, mag man nun einzelne Punkte der Linien construiren, oder diese mit Hülfe zweier Stifte und eines Fadens ohne Ende verzeichnen. Zur Unterscheidung weisen wir einer jeden der beiden Gruppen E_1 und E_2 ihre eigene Tinte an, und wir wählen die gegenseitigen Entfernungen der Curven so, dass sie die Oberfläche der Kugel möglichst gleichförmig und in Bezug auf die drei Hauptschnitte symmetrisch in viereckige Felder theilen. Die so erhaltenen Geschwindigkeits-Curven geben uns die Richtungen gleicher Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten ebener Wellen und gewähren uns ein Bild von den Gesetzen der Polarisation in einem zweiaxigen Krystalle. Nach den Richtungen aller Radien nämlich, welche in den Punkten einer der Curven auslaufen, pflanzen sich diejenigen Wellen-Fronten mit gleicher Geschwindigkeit fort, deren Schwingungs-Richtungen auf jenen Radien und gleichzeitig auf der Curve senkrecht stehen. Um aber eine Anschauung von der Art und Weise zu erlangen, wie jene Geschwindigkeit von einer Curve zur anderen wächst oder abnimmt, können wir eines der beiden Verfahren anwenden, deren Beschreibung wir folgen lassen. Wir können erstlich zu beiden Seiten des Durchschnittes P zweier Curven E_1 und E_2 der beiden Systeme nach der Richtung der Tangente an die eine Curve Stücke auftragen, die der Geschwindigkeit der anderen Curve proportional sind, und diese Operation in allen Knotenpunkten der Systeme wiederholen. Der Ueberblick wird

erleichtert, und es wird dem Geschmacke dadurch Rechnung getragen, dass man über den auf die angegebene Art erhaltenen kleinen Geraden als Axen Ellipsen construirt. Die Axen einer solchen kleinen Ellipse sind alsdann den Axen der Durchschnitts-Curve parallel und proportional, in welchen die mit der Kugel concentrisch gedachte Elasticitäts-Fläche von einer Diamentral-Ebene geschnitten wird, die mit der Ebene parallel ist, welche die Kugel in dem Mittelpunkte P der Ellipse berührt; diese ist aber die zu OP als Normalen gehörige Wellen-Front. Ein zweites Verfahren, die Grössen der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit darzustellen, besteht darin, dass man die Dicke der einzelnen Geschwindigkeits-Curven der ihnen zugehörigen Geschwindigkeit proportional macht. Dies letztere Verfahren ist für die Zeichnung das einzige mit Vortheil anwendbare. Um aber eine descriptive Darstellung der Gesetze der Lichtbewegung in optisch zweiaxigen Krystallen zu erhalten, projiciren wir die beschriebener Weise gezeichneten Geschwindigkeits Curven auf die Hauptschnitte des doppeltbrechenden Mittels, wobei die Bemerkungen der fünften Nummer ihre Anwendung finden. Die beigegebenen Figuren Taf. V. Fig. 2., 3. und 4. sind solche descriptive Darstellungen der Bewegung und Polarisation ebener Lichtwellen in einem positiven zweiaxigen Krystalle, dessen optische Axen einen Winkel von c. 60° einschliessen.

Wir halten es für überflüssig, der leicht zu findenden Modificationen zu erwähnen, welche an dem oben beschriebenen Verfahren in dem Falle einaxiger Medien anzubringen sind. Schliesslich bemerken wir noch, dass man zur Demonstration der Gesetze, welche die Fortpflanzung der Strahlen, sowie deren Oscillations-Ebenen befolgen, keines neuen Modelles bedarf. Unter den Punkten A_1 etc. braucht man nur sich die Durchgänge der scheinbaren optischen Axen zu denken; die kleinen Ellipsen sind alsdann den mit ihren parallelen Durchschnitten des Ellipsoides, welches Fresnel bei seiner Construction der Wellenfläche zu Grunde legte, ähnlich und ähnlich liegend. Die Schwingungs-Richtungen der Strahlen kann man nur mit Hülfe der Wellenfläche bequem darstellen; sie liegen in dieser Fläche und stehen auf deren Durchschnitten mit den Geschwindigkeits-Kegeln für Strahlen senkrecht.

XXI.

Elementare Ableitung der Reihe für die Berechnung des Bogens aus seiner Tangente.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
zu Dresden.

In Taf. V. Fig. 5. sei, für den Halbmesser $AC=1$,

$$\mathrm{Arc}\,AQ=a,\quad \mathrm{Arc}\,AP=b;$$

$$AV=\tan a=\alpha,\quad AU=\tan b=\beta;$$

mithin

$$UV=\alpha-\beta=\delta,$$

wobei δ zur Abkürzung dient; es ist dann

$$MP=\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,.\,\tan b}=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta},$$

oder, wenn statt α gesetzt wird $\beta+\delta$:

$$1)\qquad MP=\frac{\delta}{1+(\beta+\delta)\beta}.$$

Ferner hat man nach einer bekannten trigonometrischen Formel

$$NQ = \sin(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{\sqrt{(1+\tan^2 a)(1+\tan^2 b)}}$$
$$= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}},$$

oder wegen $\alpha = \beta + \delta$:

2) $$NQ = \frac{\delta}{\sqrt{[1+(\beta+\delta)^2][1+\beta^2]}}.$$

Der Bogen liegt aber immer zwischen seiner Tangente und seinem Sinus; es ist desshalb

$$MP > \text{Arc}\,PQ > NQ,$$

also nach dem Vorigen:

$$\frac{\delta}{1+(\beta+\delta)\beta} > \text{Arc}\,PQ > \frac{\delta}{\sqrt{[1+(\beta+\delta)^2][1+\beta^2]}}.$$

Diese Ungleichung lässt sich leicht stärker machen und zugleich vereinfachen; schreiben wir nämlich linker Hand β statt $\beta+\delta$, so wird der Nenner kleiner und mithin der ohnehin schon zu grosse Quotient noch grösser; setzen wir rechter Hand $(\beta+\delta)^2$ für β^2, so nimmt der Nenner zu und der zu kleine Quotient wird noch kleiner. So haben wir

3) $$\frac{\delta}{1+\beta^2} > \text{Arc}\,PQ > \frac{\delta}{1+(\beta+\delta)^2}.$$

Wenn jetzt von einem Bogen AB (Taf. V. Fig. 6.) die Tangente $AD = T$ gegeben ist, so theile man dieselbe in eine Anzahl gleicher Theile und setze einen solchen Theil

4) $$\frac{T}{n} = \delta.$$

Zieht man von jedem Theilpunkte eine Gerade nach dem Mittelpunkte C, so zerfällt der Bogen AB in n kleine Bögen, die wir der Reihe nach s_1, s_2, s_3 .... s_n nennen wollen. Für jeden solchen Bogen benutzen wir die Ungleichung 3) $[\beta = 0, \delta, 2\delta, \ldots\ldots \ldots (n-1)\delta]$ und erhalten so

$$\frac{\delta}{1} > s_1 > \frac{\delta}{1+\delta^2},$$

$$\frac{\delta}{1+\delta^2} > s_2 > \frac{\delta}{1+2^2\delta^2},$$

$$\frac{\delta}{1+2^2\delta^2} > s_3 > \frac{\delta}{1+3^2\delta^2},$$

. . . .

$$\frac{\delta}{1+(n-1)^2\delta^2} > s_n > \frac{\delta}{1+n^2\delta^2}.$$

Ferner durch Addition dieser Ungleichungen:

$$\frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{1+1^2\delta^2} + \frac{\delta}{1+2^2\delta^2} + \ldots + \frac{\delta}{1+(n-1)^2\delta^2}$$

$$> \text{Arc}\, AB >$$

$$\frac{\delta}{1+1^2\delta^2} + \frac{\delta}{1+2^2\delta^2} + \frac{\delta}{1+3^2\delta^2} + \ldots + \frac{\delta}{1+n^2\delta^2}.$$

Bezeichnen wir für den Augenblick die erste Summe mit Σ_1 und die zweite mit Σ_2, also

$$\Sigma_1 > \text{Arc}AB > \Sigma_2,$$

so ist

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \delta - \frac{\delta}{1+(n\delta)^2} = \delta - \frac{\delta}{1+T^2}$$
$$= \frac{T^2}{1+T^2}\delta = \frac{T^3}{1+T^2}\cdot\frac{1}{n},$$

und hieraus geht hervor, dass die Differenz $\Sigma_1 - \Sigma_2$ gegen die Null convergirt, wenn n unendlich wächst, dass also Σ_1 und Σ_2 sich einer und derselben Gränze nähern müssen. Für unendlich wachsende n geht daher die vorige Ungleichung in die Gleichung

$$\text{Lim}\,\Sigma_1 = \text{Arc}AB = \text{Lim}\,\Sigma_2$$

über, wofür wir nun schreiben können:

$$5)\quad \text{Arc}AB = \text{Lim}\left\{\frac{\delta}{1+1^2\delta^2} + \frac{\delta}{1+2^2\delta^2} + \ldots + \frac{\delta}{1+n^2\delta^2}\right\}.$$

Will man statt dieser allgemeinen Formel eine speziellere, welche zwar nicht auf jeden Bogen passt, aber dafür vom Zeichen Lim befreit ist, so benutze man die Formel

$$\frac{1}{1+q^2} = 1 - q^2 + q^4 - q^6 + \ldots,$$

welche jedoch nur für ächt gebrochene q gilt, und die also nur anwendbar ist, wenn die Grössen δ, 2δ, 3δ, ... $n\delta$ sämmtlich kleiner als die Einheit sind. Diese Eigenschaft findet statt, wenn

die grösste von ihnen, nämlich $n\delta = T$, weniger als Eins beträgt, und es findet sich nun für $T < 1$:

$$\mathrm{Arc}AB = \mathrm{Lim}\left\{\begin{array}{l} \delta(1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots\ldots + n^0) \\ -\delta^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\ +\delta^5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Setzt man statt δ seinen Werth $\frac{T}{n}$ und berücksichtigt den Satz, dass für unendlich wachsende n und ein positives ganzes k

$$\mathrm{Lim}\,\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots\ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

ist, wovon ich jüngst einen völlig elementaren Beweis gegeben habe (Archiv Thl. XIV. Nr. XXIX. S. 452.) so gelangt man zu der Formel

$$\mathrm{Arc}AB = \frac{1}{1}T - \frac{1}{3}T^3 + \frac{1}{5}T^5 - \ldots.$$

$$T < 1$$

oder für

$$\mathrm{Arc}AB = u, \text{ also } T = \tan u:$$

$$6)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{1}\tan u - \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{5}\tan^5 u - \ldots. \\ 0 < u < \frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Da die vorstehende Gleichung für jedes $u < \frac{\pi}{4}$ gilt und für $u < \frac{\pi}{4}$ beide Seiten derselben für sich betrachtet, endlich bleiben, so muss, nach einer bekannten Schlussweise, auch für $u = \frac{\pi}{4}$ noch Gleichheit bestehen; dagegen hört dieselhe für $u > \frac{\pi}{4}$ auf, weil dann die Reihe divergirt. Im letzteren Falle kann man sich aber leicht dadurch helfen, dass man das Complement $v = \frac{\pi}{2} - u$ einführt, welches nun in der That $< \frac{\pi}{4}$ ist; man hat jetzt

$$v = \frac{1}{1}\tan v - \frac{1}{3}\tan v + \frac{1}{5}\tan^5 v - \ldots..$$

$$0 < v < \frac{\pi}{4},$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - u = \frac{1}{1}\cot u - \frac{1}{3}\cot^3 u + \frac{1}{5}\cot^5 u - \ldots.$$

d. i.

$$7) \quad \begin{cases} u = \frac{\pi}{2} - \left\{ \frac{1}{1}\cot u - \frac{1}{3}\cot^3 u + \frac{1}{5}\cot^5 u - \ldots \right\} \\ \frac{\pi}{2} > u > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Für $u = \frac{\pi}{4}$ vereinigen sich beide Formeln zur Leibnitz'schen Reihe.

Will man die Euler'sche Doppelreihe für $\frac{\pi}{4}$ ableiten, so braucht man nur zu beachten, dass für $\tan x = \frac{1}{2}$ und $\tan y = \frac{1}{3}$

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1,$$

und mithin $x + y = \frac{\pi}{4}$ wird.

Die hier mitgetheilte Ableitung der Formel 6) bietet den nicht unerheblichen Vortheil, eben sowohl von der unsicheren Methode der unbestimmten Koeffizienten, als von der Einmischung imaginärer Grössen frei zu sein, und sie dürfte sich desshalb als ein für etwas gereiftere Schüler gewiss interessanter Anhang zur Trigonometrie empfehlen. Dass das ganze Verfahren nichts weiter als eine maskirte Integration ist, wird man hoffentlich nicht tadeln, sind doch die elementaren Quadraturen des Kreises der Parabel etc. auch nichts Anderes; ganz abgesehen aber von der wissenschaftlichen Berechtigung oder Nichtberechtigung solcher Herleitungen, bleibt ihnen doch noch ein didaktischer Werth vermöge ihrer Anschaulichkeit und geometrischen Durchsichtigkeit, die sie selbst demjenigen empfiehlt, der die expeditiveren Methoden der höheren Analysis kennt.

XXII.

Bemerkung zu dem Aufsatze VII. in Theil XV.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

zu Dresden.

Auf Seite 232. des genannten Aufsatzes gelangt Herr Professor Franke zu der Behauptung, dass aus der Continuität einer Funktion $F(x)$ die Continuität ihrer Abgeleiteten $F'(x)$ folge, wenn in beiden Funktionen x auf dasselbe Intervall beschränkt wird. Dieses Ergebniss ist aber, wenigstens in seiner Allgemeinheit, völlig unrichtig, und es lassen sich nicht weniger als unendlich viele Funktionen finden, die selbst stetig sind, deren Differenzialquotienten dagegen Unterbrechungen der Continuität erleiden; so z. B.

$$F(x)=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2},$$

$$F'(x)=(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}};$$

die erste Funktion bleibt hier stets continuirlich, die zweite aber wird diskontinuirlich an der Stelle $x=1$; denn bezeichnen wir mit δ und ε ein paar unendlich abnehmende Grössen, so ist

$$F'(1-\delta^3)=\frac{1}{\sqrt[3]{(-\delta^3)}}=-\frac{1}{\delta}=-\infty,$$

$$F'(1+\varepsilon^3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(+\varepsilon^3)}} = +\frac{1}{\varepsilon} = +\infty;$$

die Derivirte $F'(x)$ springt demnach an der Stelle $x=1$ aus $-\infty$ nach $+\infty$ über. Diese analytischen Bemerkungen rechtfertigen sich auch geometrisch, wenn man berücksichtigt, dass, wenn $y=F(x)$ die Gleichung einer Curve ist,

$$F'(x) = \tan\tau$$

sein muss, wo τ den Winkel bezeichnet, welchen die berührende Gerade im Punkte xy mit dem positiven Theile der Abscissenachse einschliesst. Nun charakterisirt aber die Gleichung

$$y = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}$$

bekanntlich eine Neil'sche Parabel, welche in Taf. V. Fig. 7. gezeichnet ist $(OA=1,\ OB=\frac{3}{2})$, und mithin ist

$$\tan\tau = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}.$$

Die Curve bildet einen ununterbrochenen Zug mit dem Rückkehrpunkte A und verläuft demnach durchaus stetig. Was aber $\tan\tau$ anbelangt, so ist der Werth davon negativ für $x<1$, also τ stumpf, nämlich

$$\tau = \angle PSX;$$

für $x>1$ wird $\tan\tau$ positiv, also τ spitz, nämlich

$$\tau = \angle P'S'X;$$

nun giebt aber schon die Figur zu erkennen, dass τ abnimmt, wenn man x von Null aus wachsen lässt; der Winkel τ geht also aus dem zweiten Quadranten in den ersten über, indem er bei

$$x = 1 = OA$$

den Werth $\frac{1}{2}\pi$ erhält; bekanntlich wird aber die Tangente dis-

kontinuirlich*) an der Stelle $\frac{1}{2}\pi$, und so zeigt sich auch hier auf ganz elementarem Wege die Discontinuität von

$$\tan\tau = F'(x).$$

Die Behauptung des Herrn Professor Franke ist übrigens die unrichtige Umkehrung des richtigen Satzes, dass aus der Continuität von $F'(x)$ die Continuität der ursprünglichen Funktion $F(x)$ folgt, und es liegt in dieser Bemerkung zugleich die Aufklärung des eingeschlichenen Irrthumes.

Was endlich das Cauchy'sche Criterium für die Gültigkeit des Mac Laurin'schen Theoremes betrifft, so ist dasselbe unrichtig, weil es die Gültigkeit dieses Theoremes nur an die Continuität von $F(x)$ und $F'(x)$ (für reelle und complexe Variabeln) knüpft; durch die Weglassung der Continuität von $F'(x)$, welche sich Herr Professor Franke erlauben zu können glaubt, wird aber das Cauchy'sche Criterium noch unrichtiger; die richtige Formulirung desselben erfordert die Continuität der Funktion $F(x)$ und aller ihrer Abgeleiteten $F'(x)$, $F''(x)$ in inf., wie ich in dem ersten Aufsatze meiner Mathematischen Abhandlungen (Dessau 1850) gezeigt habe.

---

*) M. s. mein Handbuch der algebraischen Analysis. §. 7.

XXIII.

Einige geometrische Aufgaben.

Von

Herrn Ligowski,

Oberfeuerwerker im 7. Artillerie-Regiment, commandirt bei der Artillerie-Prüfungs-Commission zu Berlin.

Aufgabe I. Eine Linie von der Länge a bewegt sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels so, dass die Endpunkte derselben immer auf den Schenkeln bleiben; man soll die Curve finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der geraden Linie entsteht.

Lösung. AB (Taf. V. Fig. 8.) sei irgend eine Lage der Linie a. Winkel $ABC=\alpha$.

$$AC=u, \qquad BC=v;$$

$$u=a\sin\alpha, \qquad v=a\cos\alpha.$$

Bekanntlich ist die Gleichung der Linie a:

$$\frac{y}{u}+\frac{x}{v}=1,$$

oder für u und v ihre Werthe gesetzt:

$$(1) \qquad \frac{y}{\sin\alpha}+\frac{x}{\cos\alpha}=a.$$

Um die Gleichung der gesuchten Curve zu erhalten, hat man die Gleichung (1) nach α zu differenziiren und dann aus (1) und der durch Differenziiren erhaltenen Gleichung α zu eliminiren.

Differenziirt man die Gleichung (1) nach α, so erhält man

$$(2) \qquad -\frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha^2}+\frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha^2}=0\,,$$

oder auch

$$(3) \qquad y\cos\alpha^3=x\sin\alpha^3.$$

Damit sich die Elimination leicht ausführen lasse, verfahre man auf folgende Weise.

In (3) setze man $1-\sin\alpha^2$ statt $\cos\alpha^2$, so ergiebt sich:

$$y\cos\alpha=(y\cos\alpha+x\sin\alpha)\sin\alpha^2;$$

dividirt man diese Gleichung durch $\sin\alpha\cos\alpha$, so entsteht:

$$\frac{y}{\sin\alpha}=\left(\frac{y}{\sin\alpha}+\frac{x}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha^2,$$

oder, da nach Gleichung (1) der eine Factor rechts $=a$ ist:

$$\frac{y}{\sin\alpha}=a\sin\alpha^2$$

und

$$(4) \qquad \frac{y}{a}=\sin\alpha^3.$$

Wird in (3.) nun $1-\cos\alpha^2$ statt $\sin\alpha^2$ gesetzt und eben so wie oben verfahren, so erhält man

$$(5) \qquad \frac{x}{a}=\cos\alpha^3.$$

Um nun α zu eliminiren, potenzire man (4) und (5) mit $^2/_3$ und addire dann beide Gleichungen, wodurch

$$(6) \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

entsteht, welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

Aufgabe II. Eine Linie von der Länge $a+b$ bewegt sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels so, dass die Endpunkte derselben immer auf den Schenkeln bleiben; man soll die Gleichung der Curve

finden, welche ein Punkt der Linie beschreibt, der um die Länge a von dem Endpunkte derselben entfernt ist.

Lösung. AB (Taf. V. Fig. 9.) sei irgend eine Lage der Linie, M der die Curve beschreibende Punkt.

$$AM=a, \quad MB=b, \quad CP=x, \quad \text{und} \quad PM=y;$$

$$\text{Winkel } ABC=\alpha.$$

Man hat

$$(1) \qquad \frac{x}{a}=\cos\alpha$$

und

$$(2) \qquad \frac{y}{b}=\sin\alpha.$$

Quadrirt man die Gleichungen (1) und (2) und addirt sie dann, so entsteht

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

welches bekanntlich die Gleichung der Ellipse ist.

Anmerkung. Ist wie in Taf. V. Fig. 10. M der beschreibende Punkt in der Verlängerung von AB gegeben, so entsteht ebenfalls eine Ellipse.

Es ist wie oben:

$$\frac{x}{a}=\cos\alpha \text{ und } \frac{y}{b}=\sin\alpha,$$

also auch wieder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Diese Aufgabe II. ist ein specieller Fall des Lehrsatzes, den Herr Professor Pross in Nr. XXXIV. des 6. Bandes dieses Archivs gegeben hat.

XXIV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll diejenige Curve bestimmen, welche die Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Curve bilden, sobald die letztere auf der Abscissenachse oder einer Parallelen dazu fortgewälzt wird. — Aus der Kettenlinie z. B. entsteht auf diese Weise eine Parabel mit demselben Parameter, aus der Cycloide ein Kreis, dessen Halbmesser das Vierfache von dem Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

XXV.

Miscellen.

Noch eine Auflösung des Problems des Rückwärtseinschneidens mittelst des Messtisches. Von dem Herausgeber.

Es wird Fig. 11. auf Taf. V. leicht ohne weitere Erläuterung für sich verständlich sein.

Die an dem Stationspunkte D liegenden Winkel ADC und BDC wollen wir der Kürze wegen respective durch α und β bezeichnen. Sind nun E und F die Durchschnittspunkte der Linien BD und AD mit den um die Dreiecke ACD und BCD beschriebenen Kreisen, so ist, wenn man AE, CE und BF, CF zieht, offenbar,

$$\angle AEC=\alpha, \quad \angle BFC=\beta.$$

Ferner ist

$$\angle CAE=\angle CDE=\angle BDC=\beta$$

und, weil

$$\angle CBF+\angle CDF=\angle ADC+\angle CDF=180^\circ$$

ist, so ist

$$\angle CBF=\angle ADC=\alpha.$$

Ueberlegt man nun noch, dass D der Durchschnittspunkt der beiden Linien AF und BE ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgende Bestimmungsweise des Punktes D mittelst des Messtisches, wobei die den Punkten A, B, C auf dem Tische entsprechenden Punkte auf dem Felde durch A', B', C' bezeichnet werden sollen.

I. Man lege die Kippregel an AC, orientire den Tisch nach C', drehe sodann die Kippregel um A, visire nach B', und ziehe an der Kippregel die Linie AE. Hierauf lege man die Kippregel an EA, orientire den Tisch nach A', lege die Kippregel an C, visire nach C' und ziehe an der Kippregel die Linie CE. Der Durchschnittspunkt der beiden auf dem Tische gezogenen Linien AE und CE ist der Punkt E auf dem Tische.

II. Man lege die Kippregel an BC, orientire den Tisch nach C', drehe sodann die Kippregel um B, visire nach A', und ziehe an der Kippregel die Linie BF. Hierauf lege man die Kippregel an FB, orientire den Tisch nach B', lege die Kippregel an C, visire nach C' und ziehe an der Kippregel die Linie CF. Der Durchschnittspunkt der beiden auf dem Tische gezogenen Linien BF und CF ist der Punkt F auf dem Tische.

III. Zieht man nun die Linien BE und AF, so ist deren Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt D auf dem Messtische.

Ich habe die erste Idee zu dieser Auflösung des Problems des Rückwärtseinschneidens aus dem Traité de navigation par V. Caillet. Tome I. Brest. 1848. 8. p. 261. entlehnt, glaube aber durch meine obige Darstellung derselben, wodurch sie, wie es mir scheint, für die Anwendung in der Praxis wohl geeignet werden dürfte, die sich a. a. O. nicht findet, auch ein kleines Eigenthumsrecht an ihr beanspruchen zu dürfen.

Ueber die Gleichung (Archiv. Theil XII. S. 293.), welcher angeblich keine complexe Zahl genügt. Von dem Herrn Doctor R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

Das Staunen über eine unerwartete Erscheinung, welche aus guter Quelle berichtet wird, pflegt die Geister sofort zur Frage nach dem Zusammenhang derselben anzutreiben, ohne dem Zweifel viel Raum zu lassen, ob auch der Thatbestand frei von Täuschungen ermittelt sei. Glüsklicherweise hat ein gewandter Rechner es sich nicht verdriessen lassen, in Beziehung auf die Gleichung des Herrn Prof. Schlömilch, welcher angeblich keine complexe Zahl genügt, die Thatfrage zu erheben, und hat durch Anwendung der gewöhnlichen Methoden complexe Zahlen gefunden, welche der gegebenen Gleichung wirklich genügen. Herr Dr. Claussen, dem wir diese Arbeit verdanken (Archiv. XIII. S. 334.), vermuthet deshalb einen Irrthum in dem merkwürdigen Aufsatze des Herrn Prof. Schlömilch.

In der That hält der übrigens schön angelegte Beweis in einem Punkte nicht Stich, dass nämlich

$$\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{b}{(a+1)^2+b^2}+\frac{b}{(a+2)^2+b^2}-\ldots$$

allgemein weniger als $\frac{b}{a^2+b^2}$ und mehr als $\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{b}{(a+1)^2+b^2}$ sei, und folglich nur für $b=0$ oder $a=\infty$ verschwinde. Die letzte Folgerung ist nur richtig, wenn a positiv. Ist dagegen a negativ (wie in den von Clausen berechneten Werthen), so kann der zweite Nenner kleiner als der erste sein, mithin der zweite Bruch den ersten überwiegen und die untere Grenze negativ werden, woraus die Möglichkeit des Verschwindens der Reihe einleuchtet.

Druckfehler im 15ten Theile.

S. 147. Z. 12. von unten statt „neue" setze man „nur".

S. 166. - 14. „ oben „ „ihr" „ „ „ihm".

S. 169. - 8. „ unten „ „Ereignisse" setze man „Ergebnisse",

S. 172. - 8. „ „ vor „auf" setze man „bis".

S. 182. - 2. „ „ statt „Zu" „ „ „In".

S. 196. - 18. „ „ „ „Richtung" setze man „Reihung".

XXVI.

Geometrische Aufgaben.

Von
Herrn S. E. Baltrusch
zu Danzig.

I.

Vier Gerade gehen durch einen Punkt und begrenzen drei gegebene Winkel in einer Ebene; man soll eine Gerade ziehen, die jene vier Geraden so schneide, dass die beiden äusseren Abschnitte derselben gegebenen Grössen gleich seien. (Taf. VI. Fig. 1.).

Annahme: Die gegebenen Winkel seien $AOB=\alpha, BOC=\beta$, und $COD=\gamma$; die gegebenen Abschnitte $AB=a$, $CD=c$.

Konstruktion. Beschreibe über c einen Bogen, welcher den gegebenen Winkel γ fasst; mache Winkel $CDG=\beta$, $GDH=\alpha$. Ziehe durch G zur CD eine Parallele GK, mache $GK=a$, verlängere KG, welche den Kreis in J treffe, und beschreibe durch die drei Punkte K, J, K einen Kreis, welcher die CD in A und E schneide; ziehe AH, HE, welche den ersten Kreis in O und O' treffen; endlich ziehe GO, GO', welche der CD in B, F begegnen; so begrenzen AO, BO, CO, DO die drei gegebenen Winkel α, β, γ, und die Abschnitte $AB=a$, $CD=c$ der AD sind gegeben.

Aehnliches gilt von dem Punkte O'; denn es ist auch

$$FO'E=\alpha,\quad EO'D=\delta,\quad DO'C=\gamma;$$

auch ist der Abschnitt FE der FC der gegebenen a gleich.

Beweis.

$$KAH = HOG = \alpha,$$

also AK parallel BG; daher

$$AB = KG = a, \quad BOC = CO'G = \beta, \quad \text{und} \quad COD = \gamma;$$

also leistet der Punkt O das Verlangte.

Aber auch der Punkt O' erfüllt die geforderten Bedingungen. Denn $HEK = HO'G = \alpha$; also EK parallel FG, und JK parallel AF; daher $EF = GK = a$, und hieraus folgt $DE = BC$. Die letzte Behauptung wird in folgendem Satze erwiesen.

Satz.

Der Kreis M schneide den Kreis m in P, P'; ziehe die Sekante AB beliebig, welche den ersten Kreis in A, A', den anderen in C, C' treffe; die Sehnen AP, PA' durchschneiden den Kreis m in O, O'. (Taf. VI. Fig. 2.).

a) Macht man nun $BC = A'C'$, zieht BO, welche den Kreis m in D schneide, und die DO', welche die AA' in B' treffe: so ist $AB = A'B'$.

Denn für die Transversale AP ist in Bezug auf die Seiten des Dreiecks $BA'E$ folgende Gleichung

$$1) \quad BO.EP.A'A = BA.A'P.EO;$$

für die Transversale $B'D$ in Bezug auf dasselbe Dreieck $BA'E$ ist die Gleichung

$$2) \quad BD.EO'.A'B' = BB'.A'O'.ED.$$

Ferner ist

$$3) \quad PE.EO' = OE.ED,$$

und

$$4) \quad OB.BD = (CB.BC' = C'A'.A'C) = O'A'.A'P.$$

Wenn man das Produkt der Gleichungen 1) und 2) durch das Produkt der Gleichungen 3) und 4) dividirt, so erhält man

$$AA'.A'B' = AB.BB';$$

also

$$AB : A'B' = AA' : BB' = AB + BA' : BA' + A'B' = BA' : BA';$$

daher

$$AB = A'B'.$$

b) Es ist FDP' parallel AB, und AF parallel BD. Denn

$$AOB = DP'P = FP'P = FAP;$$

also AF parallel BO. Ferner ist

$$A'PP' = P'DO' = P'FA';$$

also $A'F$ parallel DB'; und da $AA' = BB'$; so ist

$$\Delta FAA' \cong \Delta DBB';$$

also $AF = BD$; daher ist $ABDF$ ein Parallelogramm. Folglich ist die Behauptung erwiesen.

c) Macht man $AB = A'B'$; so ist $BC = C'A'$. Denn

$$1) \quad BO.EP.A'A = BA.A'P.EO;$$

$$2) \quad BD.EO'.A'B' = BB'.A'O'.ED;$$

$$3) \quad PE.EO' = OE.ED;$$

$$4) \quad A'B' = AB.$$

Das Produkt der Gleichungen 1) und 2), durch das Produkt der Gleichungen 3) und 4) dividirt, giebt

$$BO.BD.AA' = A'O'.A'P.BB'.$$

Es ist aber $AA' = BB'$; daher ist

$$BO.BD = A'O'.A'P.$$

Nun ist

$$DB.BO = CB.BC',$$

und

$$O'A'.A'P = CA'.A'C', \quad CB.BC' = CA'.A'C.$$

Daraus folgt

$$BC:A'C' = A'C:BC'.$$

Wäre nun BC nicht $= A'C'$, so müsste BC entweder $>$ oder $< A'C'$ sein; wenn $BC > A'C'$ wäre, so müsste auch $A'C > BC'$, oder $A'C' + C'C > BC + CC'$, oder $A'C' > BC$ sein, was unmöglich ist; daher kann BC nicht $> A'C'$ sein; und aus demselben Grunde kann BC auch nicht $< A'C'$ sein; folglich muss BC nothwendig $= A'C'$ sein.

II.

a) In welche Vierecke lassen sich andere Vierecke so beschreiben, dass die Seiten des eingeschriebenen mit denen des gegebenen an jeder Ecke des eingeschriebenen Vierecks gleiche Winkel bilden? (Taf. VI. Fig. 3.).

Die Winkel des gegebenen Vierecks seien A, B, C, D; des eingeschriebenen A', B', C', D'; etc. so ist

$$A'+2\alpha+B'+2\beta+C'+2\gamma+D'+2\delta=8R;$$

aber

$$A'+B'+C'+D'=4R;$$

also

$$2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=4R;$$

folglich

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2R.$$

Nun ist

$$A+\alpha+\delta+C+\beta+\gamma=4R;$$

folglich

$$A+C=2R.$$

Das gesuchte Viereck ist also ein solches, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt.

b) Ein Viereck, in welchem die Summe der gegenüberliegenden Winkel $2R$ beträgt, ist gegeben, und man soll in dasselbe ein Viereck so beschreiben, dass die Seiten dieses mit denen des gegebenen an den Ecken des eingeschriebenen gleiche Winkel bilden. (Taf. VI. Fig. 4.).

Das gegebene Viereck sei $ABCD$; also

$$A+C=B+D=2R.$$

Die Diagonalen desselben schneiden sich in O; aus O ziehe man Senkrechte Oa, Ob, Oc, Od auf die Gegenseiten des Vierecks: so ist $abcd$ ein solches Viereck, dessen Seiten mit denen des Vierecks $ABCD$ an a, b, c, d gleiche Winkel bilden.

Denn Viereck $AaOd$ ist ein Kreisviereck, also ist $Aad=AOd=BOb$, weil $\Delta AOd \sim \Delta BOb$; ferner ist $BOb=Bab$, weil $BaOb$ ein Kreisviereck ist; daher $Aad=Bab$.

Eben so wird die Gleichheit der Winkel an den Ecken b, c, d erwiesen.

c) **Wenn man aus einem beliebigen Punkte der einen Diagonale eines Kreisvierecks zwei Senkrechte auf zwei Seiten des Vierecks zieht, und durch die Durchschnitte dieser Senkrechten mit der anderen Diagonale zwei neue Senkrechte auf die beiden andern Seiten führt: so treffen sich die beiden letzten Senkrechten in einem Punkte der ersten Diagonale; die Fusspunkte dieser vier Senkrechten bilden die Ecken eines Vierecks, dessen Seiten mit den Seiten des gegebenen Vierecks gleiche Winkel an jeder des eingeschriebenen Vierecks begrenzen. Die Seiten dieses eingeschriebenen Vierecks sind den Seiten des unter b) eingeschriebenen Vierecks parallel.** (Taf. VI. Fig.5.).

Es mögen βc, βd senkrecht auf CD, DA sein, und die Diagonale AC in α, γ schneiden; ferner seien αb, γa senkrecht auf CB, BA: so treffen αb, γa in einem Punkte δ der Diagonale BD zusammen.

Träfen sich αb, γa nicht in der Diagonale BD, so mögen sie sich in δ' begegnen, und δ' liege also ausserhalb der BD.

Es sind $ABCD$, $Aa\gamma d$, αbCc, also auch $\alpha\beta\gamma\delta'$ Vierecke, um welche sich Kreise beschreiben lassen. Folglich ist

$$\alpha\beta\delta' = \alpha\gamma\delta' = A\gamma a\,.$$

Nun ist auch

$$BAC = BDC \quad \text{und} \quad Aa\gamma = Dc\beta = R;$$

also

$$\triangle\, Aa\gamma \sim \triangle\, Dc\beta\,,$$

daher $A\gamma a = D\beta c$, folglich $\alpha\beta\delta' = D\beta c$. Daher fällt $\delta'\beta$ mit $D\beta$ zusammen; also treffen sich αb, γa in δ, einem Punkte der BD. Viereck $abcd$ ist ein solches, dessen Seiten mit den Seiten des Vierecks $ABCD$ gleiche Winkel bilden.

Denn

$$Aad = A\gamma d = \beta\gamma\alpha = \beta\delta\alpha = baB\,,$$

weil $Aa\gamma d$, $\gamma\beta\alpha\delta$, δbBa Vierecke sind, um welche man Kreise beschreiben kann.

Aus gleichen Gründen ist $abB = cbC$: etc.

Sei nun Oa', Ob', Oc', Od' senkrecht auf AB, BC, CD, DA, so folgt daraus

$$AO : A\gamma = Aa' : Aa = Ad' : Ad;$$

daher ist ad parallel $a'd'$. Aus denselben Gründen ist ab parallel $a'b'$; etc.

d) **Die Umfänge zweier Vierecke, welche unter *b*) oder *c*) in ein Kreisviereck eingeschrieben sind, müssen einander gleich sein.** (Taf. VII. Fig. 1.).

Man verlängere bc um ein Stück $ce = cd$, ab um ein Stück $bf = be$, da um ein Stück $ag = af$; so ist dg gleich dem Umfange des Vierecks $abcd$. Ebenso verfahre man mit dem Umfange des Vierecks $a'b'c'd'$, so erhält man

$$d'g' = d'a' + a'b' + b'c' + c'd'.$$

Nun ist zu zeigen, dass $dg = d'g'$ ist.

Es ist Viereck $dcc'd'$ $\cong$ Viereck $ecc'e'$; denn

$$dc = ce, \quad cc' = cc', \quad d'c' = c'e',$$

und

$$dcc' = ecc', \quad cc'd' = cc'e';$$

drei auf einander folgende Seiten und die beiden dazwischen liegenden Winkel des einen Vierecks sind also einzeln genommen gleich den gleichnamigen Stücken des anderen Vierecks. Aus denselben Gründen ist Viereck $e'b'be$ $\cong$ Viereck $f'b'bf$, und Viereck $faa'f'$ $\cong$ $gaa'g$. Daher ist

$$dd' = ee' = ff' = gg'.$$

Ferner ist Winkel

$$adA = cdd' = cee' = bff' = agg';$$

also dd' gleich und parallel gg'; daher ist $dd'g'g$ ein Parallelogramm, also $dg = d'g'$.

III.

Wenn zwei Vielecke einander ähnlich sind: so haben sie stets einen Aehnlichkeitspunkt. Die gleichnamigen Seiten beider Vielecke sind entweder parallel oder nicht parallel. Jeden dieser beiden Fälle hat man in zwei neue Fälle zu zertheilen. Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Vielecke parallel sind, so sind die parallelen Seiten entweder einstimmig, d. h. nach derselben Seite hin parallel, oder nicht einstimmig, d. h. entgegengesetzt parallel. Zwei ähnliche Vielecke, deren gleichnamige Seiten einstimmig parallel sind, haben nur einen äusseren Aehnlichkeitspunkt.

Zwei ähnliche Vielecke, deren gleichnamige Seiten entgegengesetzt parallel sind, haben nur einen innern Aehnlichkeitsdunkt.

Diese beiden Sätze sind allgemein bekannt und auch leicht erweisbar; vielleicht weniger bekannt, oder doch nicht so behandelt, wie hier, sind die beiden folgenden Sätze:

Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Vielecke nicht parallel sind, so folgen sie entweder in derselben oder in entgegengesetzter Richtung auf einander. Im ersten Falle haben beide Vielecke einen äussern, im andern einen innern Aehnlichkeitspunkt. (Taf. VII. Fig. 2.).

Zwei ähnliche Vielecke lassen sich in jedem Falle durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen; und da der Aehnlichkeitspunkt zweier ähnlichen Dreiecke zugleich der Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Vielecke ist, so darf man nur den Aehnlichkeitspunkt von zwei ähnlichen Dreiecken suchen.

a) Es sei

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

und die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke folgen in derselben Richtung auf einander.

Die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke begrenzen gleiche Winkel, und bilden dadurch drei Vierecke, um welche sich Kreise beschreiben lassen; diese drei Kreise durchschneiden sich in *einem* Punkte, welcher der Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Dreiecke ist. (Taf VII. Fig. 2.).

Das erste Kreisviereck ist $ADA'E$, das zweite $BFB'D$, und das dritte $CFC'E$. Die Gründe dafür sind leicht angebbar.

Die beiden Kreise $ADA'E$ mit $BFB'D$ durchschneiden sich in D und P; so ist P der gesuchte Aehnlichkeitspunkt. Denn

$$\Delta PAB \sim \Delta PA'B';$$

weil $PAE = PA'E$, da beide auf demselben Bogen PE des Kreises $PA'ADE$ stehen; $PBD = PB'D$, da beide auf demselben Bogen PD des Kreises PBD stehen; also

$$AB : A'B' = PA : PA' = PB : PB'.$$

Auch ist

$$\Delta PAC \sim \Delta PA'C';$$

denn

$$PAD = PA'D,$$

weil beide auf demselben Bogen PD im Kreise PAD stehen, und

$$PA : PA' = AC : A'C';$$

also ist auch

$$PC : PC' = AC : A'C'.$$

Die Verhältnisse zweier Abstände des Punktes P von zwei gleichnamigen Eckpunkten beider ähnlichen Dreiecke sind unter einander gleich; daher ist P der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke. Der dritte Kreis $CFC'E$ muss auch durch den Punkt P gehen. Denn

$$APC = A'PC',$$

weil $\Delta APC \sim \Delta A'PC'$;

$$APB = A'PB',$$

aus demselben Grunde, also

$$APB - APC = A'PB' - A'PC' \text{ oder } CPB = C'PB',$$

und dazu Gleiches

$$BPC' = BPC'$$

gesetzt, giebt

$$CPC' = BPB' = BDB' = CEC'.$$

Daher liegen die fünf Punkte C, F, C', E, P auf dem Umfange eines Kreises.

b) **Die Mittelpunkte der drei oben genannten Kreise bilden die Ecken eines Dreiecks, das jedem von den beiden ähnlichen Dreiecken ähnlich ist. (Taf. VII. Fig. 3.).**

Es sei α der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch ADP, β der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch $BB'P$, und γ der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch $CC'P$ geht.

Die Centrale $\alpha\beta$ halbirt die Bogen DmP, DnP in m, n; die Centrale $\alpha\gamma$ halbirt die Bogen EpP, EqP in p, q, und die Centrale $\beta\gamma$ halbirt die Bogen FrP, FsP in r, s.

Es ist nun zu zeigen, dass $DAE = m\alpha p$, also

$$\frac{1}{2} \text{ Bogen } DE = \text{ Bogen } mp.$$

$$\text{Bogen } DE = \text{ Bogen } DEP - \text{ Bogen } EmP;$$

also

$$\frac{1}{2} \text{ Bogen } DE = \frac{1}{2} \text{ Bogen } DEP - \frac{1}{2} \text{ Bogen } EmP$$
$$= \text{Bogen } mpP - \text{Bogen } pP = \text{Bogen } mp.$$

Daher

$$m\alpha p = DAE = BAC.$$

Eben so zeigt man, dass $r\beta n = FBD$; denn

$$\frac{1}{2} \text{ Bogen } FD = \frac{1}{2} \text{ Bogen } FrP - \frac{1}{2} \text{ Bogen } DnP$$
$$= \text{Bogen } rnP - \text{Bogen } nP = \text{Bogen } rn.$$

Daher

$$ABC = \alpha\beta\gamma.$$

Folglich

$$\Delta\, \alpha\beta\gamma = \Delta\, ABC.$$

c) Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, ihre gleichnamigen Seiten nicht parallel sind, sie aber in derselben Richtung auf einander folgen, und man die Geraden, welche die gleichnamigen Ecken beider Dreiecke verbinden, nach dem Verhaltnisse zweier gleichnamigen Seiten theilt: so bilden die Theilungspunkte die Ecken eines Dreiecks, das einem von den gegebenen ähnlich ist (Taf. VII. Fig. 4.).

Die gegebenen ähnlichen Dreiecke seien ABC und $A'B'C'$. Ziehe $A'b$, $B'c$, $C'a$ parallel AB, BC, CA, und mache

$$bA' = A'B', \quad B'c = B'C', \quad C'a = C'A'.$$

Verlängere die drei Geraden bA', $B'c$, $C'a$, welche sich in a', b', c' treffen; so ist

$$\Delta\, a'b'c' \sim \Delta\, ABC,$$

weil die gleichnamigen Seiten unter einander parallel sind. Da die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke gleiche Winkel begrenzen, so ist

$$B'A'b' = C'B'c' = A'C'a',$$

also

$$bA'B' = c'B'C' = a'C'A';$$

und da die drei Dreiecke $b'A'B'$, $c'B'C'$, $a'C'A'$ gleichschenklig sind, so sind sie auch unter einander ähnlich; folglich ist

$$A'B':B'C':C'A' = bB':cC':aA'.$$

Nach der Konstruktion ist aber

$$A\alpha:\alpha A' = AB:A'B', \quad B\beta:\beta B' = BC:B'C';$$
$$C\gamma:\gamma C' = AC:A'C';$$

daher

$$\alpha\beta:bB' = \beta\gamma:cC' = \gamma\alpha:aA' = AB \cdot AB + A'B'.$$

Folglich ist

$$\Delta\,\alpha\beta\gamma \sim \Delta\,ABC.$$

α) Wenn zwei Dreiecke ähnlich, ihre gleichnamigen Seiten nicht parallel sind, und in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen: so soll man den Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke bestimmen. (Taf. VIII. Fig. 1.).

Sei

$$\Delta\,ABC \sim \Delta\,A'C'B'.$$

Theile AA', BB' nach dem Verhältnisse zweier gleichnamigen Seiten; also

$$AD:DA' = AB:A'B' = BE:EB',$$

und suche zu den drei Punkten A, D, A' den vierten harmonischen d, d. h. es muss sein

$$AD:Ad = DA':A'd;$$

daraus folgt

$$AD + Ad:Ad - AD = DA' + A'd:A'd - DA';$$

sei α die Mitte von Dd; so wird vorstehende Proportion folgende:

$$2A\alpha:2D\alpha = 2D\alpha:2A'\alpha$$

oder

$$A\alpha:D\alpha = D\alpha:\alpha A'.$$

Nun beschreibe man um α mit αD einen Kreis, welcher die DE in J schneide; so ist J der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Denn man bestimme (Taf. VIII. Fig. 2.) auch zu den drei Punkten B, E, B' den vierten harmonischen Punkt e, halbire Ee in β, und beschreibe um β mit βE einen Kreis, welcher den vorigen Kreis in J' und K schneide; so kann man zeigen, wie vorher, dass

$$B\beta:\beta E = E\beta:\beta B'$$

ist. Es ist nun

$$\Delta A'\alpha J' \sim \Delta \alpha J' A;$$

weil

$$A'\alpha:\alpha J' = J'\alpha:\alpha A,$$

und $A\alpha J'$ beiden Dreiecken gemein. Daher

$$\alpha J' A' = \alpha A J';$$

ferner ist

$$\alpha J' D = \alpha D J' = D J' A + D A J';$$

also

$$A' J' D = D J' A:$$

folglich

$$A' J' : J' A = A' D : D A = A' B' : A B.$$

Eben so zeigt man, dass $B' J' E = E J' B$; daher

$$B' J' : J' B' = B' E : E B = A' B' : A B;$$

und daraus folgt

$$\Delta A' J' B' \sim \Delta A J' B;$$

also $A' J' B' = A J' B$; daher

$$D J' A' + A' J' B' + B' J' E = D J' A + A J' B + B J' E = 2R;$$

also $D J' E$ eine Gerade; folglich ist J und J' ein und derselbe Punkt.

Aus Vorstehendem lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$\Delta A' J C' \sim \Delta A J C, \quad \text{und} \quad \Delta B' J C' \sim \Delta B J C.$$

Daher ist J der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Bemerkung. Sind die drei Punkte A, D, A' gegeben, so kann man unmittelbar den Mittelpunkt des gesuchten Kreises finden, ohne vorher den vierten harmonischen Punkt d gesucht zu haben. Daher folgende Aufgabe.

Die Strecke AA' nach dem Verhältnisse $p:q$ zu theilen. (Taf. VIII. Fig.3.).

Ziehe AF in beliebiger Richtung, $A'G$ parallel AF; mache $AF=p$, $A'G=q$, ziehe FG, welche die AA' in D schneide; führe DK parallel AF, mache $DK=q$, und ziehe FK, welche die AA' in α treffe: so ist α der Mittelpunkt und αD der Radius des gesuchten Kreises.

Denn

$$AF:A'G=p:q=AD:DA',$$

und

$$AF:DK=p:q=A\alpha:\alpha D;$$

daher ist auch

$$AD:A\alpha-AD=DA':\alpha D-DA'$$

oder

$$AD:D\alpha=DA':A'\alpha;$$

folglich

$$AD:DA'=D\alpha:\alpha A'=A\alpha:\alpha D.$$

Macht man die Verlängerung von $GA'=q=A'H$, und zieht FH, welche der AA' in d begegnet, so sind A, D, A', d vier harmonische Punkte, und α ist die Mitte von Dd

Dieses kann man durch Proportionen, aber auch auf folgende Art erweisen. Ziehe HK, welche die FD in L erreiche: so ist DK parallel GH, und DK zugleich $\frac{1}{2}$ von GH, daher $HK=KL$, also auch $d\alpha=\alpha D$, weil HK parallel Dd ist.

β) Wenn die gleichnamigen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke nicht parallel sind, ihre gleichnamigen Ecken in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen: so giebt es drei Kreise, deren jeder durch den Aehnlichkeitspunkt geht, jeder seinen Mittelpunkt in einer Geraden hat, welche zwei gleichnamige Ecken beider Dreiecke verbindet, und die zwei Punkte, in welchen jeder Kreis seine Centrale schneidet, bilden mit den beiden Eckpunkten der Dreiecke, durch welche die Centrale geht, vier harmonische Punkte, und zwar sind die Schnittpunkte des Kreises, so wie die gleichnamigen Eckpunkte, zugeordnete harmonische Punkte (Taf. VIII. Fig. 4.).

Sei

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

Man theile AA' in D, BB' in E, CC' in F so, dass

$$AD : DA' = BE : EB' = CF : FC' = AB : A'B'$$

sei. Suche nun zu A, D, A'; B, E, B'; C, F, C' den vierten harmonischen Punkt d; e; f; halbire Dd, Ee, Ff in α, β, γ; so sind diese Punkte die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Die Kreise um α mit αD, um β mit βE beschrieben, mögen sich in J schneiden: so ist J der Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$, wie oben bewiesen. Man lege durch J und F einen Kreis, dessen Mittelpunkt γ' in CC' liege. Da

$$CJB = C'JB', \quad BJE = B'JE,$$

so ist

$$CJE = C'JE,$$

oben erwiesen,

$$\gamma' FJ = FJ\gamma',$$

also

$$\gamma' JC' = \gamma' CJ;$$

daher

$$\Delta \gamma' C'J \sim \Delta \gamma' JC;$$

also

$$C'\gamma' : \gamma' F = F\gamma' : \gamma' C,$$

oder

$$C'\gamma' + \gamma' F : \gamma' F - \gamma' C' = F\gamma' + \gamma' C : \gamma' C - \gamma' F,$$

oder

$$C'f' : C'F = f'C : CF,$$

wenn der dritte Kreis die CC' in f' schneidet; daher sind C, F, C', f' vier harmonische Punkte; folglich ist f' und f ein und derselbe Punkt; daher ist auch γ' und γ ein und derselbe Punkt.

γ) Die drei gleichartigen Durchschnittspunkte der drei Kreise mit den drei Geraden, welche durch gleichnamige Eckpunkte der ähnlichen Dreiecke gehen, liegen mit dem Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden. Es bilden also eine Gerade D, J, F und E, so wie $dJef$. (Taf. VIII. Fig. 4.).

Dass DJE eine Gerade bildet, ist schon oben gezeigt; es bleibt aber zu beweisen, dass die Gerade DJE die Gerade CC' in F nach dem Verhältnisse zweier gleichnamigen Seiten theilet.

Also angenommen, der Punkt J sei durch die beiden Kreise um α und β bestimmt, die Gerade DJE gezogen, welche die CC' in F schneide; so ist

$$B'JE = BJE,$$

und

$$C'JB' = CJB,$$

weil

$$\triangle C'JB' \sim \triangle CJB;$$

daher ist

$$C'JE = CJE,$$

folglich ist

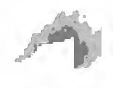
$$C'F : FC = C'J : CJ = A'B' : AB,$$

und daraus ergiebt sich, dass die vier Punkte D, J, F, E in einer Geraden liegen.

Es liegen aber auch die vier Punkte d, J, f, e in einer Geraden; denn

$$DJd = R = EJe = FJf;$$

weil Dd, Ee, Ff Durchmesser der Kreise sind.



XXVIII.

Elementargeometrischer Beweis eines in diesem Archiv viel besprochenen Satzes.

Von dem

Herrn Gymnasialdirector August

in Berlin.

Der geometrische Satz, um den es sich hier handelt, ist im 13. Theile S. 341. und im 15. Theile S. 351. untersucht, auch ist für einen sehr speciellen Fall desselben ein geometrischer Beweis im 15. Theile S. 358. gegeben. Er lässt sich, so weit er die Winkel des Dreiecks betrifft, höchst einfach durch indirecte Sshlüsse aus dem folgenden ableiten, der eine sehr elementare Beweisführung zulässt.

Lehrsatz. Wenn zwei ungleiche Winkel eines Dreiecks durch Transversalen proportional getheilt werden; so ist die Theilungstransversale des grösseren Winkels kleiner, als die des kleineren.

Beweis. In Dreieck ABC (Taf. VIII. Fig. 5.) sei Winkel $ABC > ACB$ und der kleinere Winkel ACB durch die Transversale CD in beliebigem Verhältniss getheilt; so dass $ACD:DCB = m:n$. Es ist zu zeigen, dass eine aus B gezogene Transversale, die den grösseren Winkel ABC in demselben Verhältnisse $m:n$ theilt, kleiner ist als DC.

Man lege zunächst die Transversale BE so, dass Winkel $ABE = DCA$ wird; dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und ACD die Proportion $AB:AC = BE:DC$; weil aber $AB < AC$, so ist auch $BE < DC$.

Ferner lege man die Transversale BF so, dass Winkel $FBC = DCB$ wird; dann haben die Dreiecke FBC und DCB

eine gleiche Seite BC und einen gleichen anliegenden Winkel $FBC = DCB$; es muss daher in demjenigen Dreieck, in welchem der zweite an dieser Seite anliegende Winkel grösser ist, auch die Gegenseite dieses Winkels grösser sein als die entsprechende Seite des anderen Dreiecks; folglich ist auch $BF < DC$.

Soll nun der grössere Winkel ABC proportional mit dem kleineren Winkel ACB getheilt werden; so werden seine Theile grösser als die Theile des anderen. Es muss also der an BA anliegende Winkeltheil grösser sein als Winkel ACD, d. i. grösser als ABE. Die Theilungslinie fällt daher zwischen BE und BC. Eben so muss der an BC anliegende Winkeltheil grösser sein als Winkel DCB, d. i. grösser als FBC. Die Theilungslinie fällt daher auch zwischen BF und BA. Ist demnach BG diejenige Theilungstransversale, durch welche die Proportion $ABG : GBC = ACD : DCB = m : n$ unter den Winkeltheilen entsteht; so liegt sie auch nothwendig zwischen BE und BF.

Wenn aber von einem Punkte B ausserhalb einer geraden Linie AC drei gerade Linien BE, BG, BF an dieselbe gezogen sind, so ist die mittlere BG dieser drei Linien kleiner als die grössere der beiden äusseren, oder wenn diese einander gleich sind, kleiner als jede von beiden. Da nun sowohl BE als auch BF kleiner als DC ist; so muss auch BG kleiner als CD sein. Dies sollte bewiesen werden.

*Zusatz**). Wenn zwei Winkel eines Dreiecks durch gleiche Transversalen proportional getheilt sind, so sind die Winkel gleich.

Beweis. Wären die Winkel ungleich; so wären auch die Transversalen ungleich. Da diese aber gleich sind, so können die Winkel nicht ungleich sein, sind also gleich.

Anmerkung. Die Beweisführung gilt für jede zwei innere Winkel eines Dreiecks. Construction und Beweis lassen sich auch noch für den Fall anwenden, wo die Linien BD und CF parallel sind. In diesem Falle wird $BE = DC$. Für den Fall, dass BD und CF divergiren, die Winkel also eigentlich Aussenwinkel eines Dreiecks sind, lässt sich aus dieser Construction nichts folgern, weil der Beweis $BE > DC$ ergiebt, weshalb eine Vergleichung zwischen BG und DC auf diesem Wege nicht möglich wird.

---

*) Dieser Zusatz ist der, nur im Ausdruck etwas veränderte, Thl. 15. S. 355. im zweiten Absatz enthaltene Lehrsatz.

XXVIII.

Fortsetzung der in Theil X. Nr. XXXVII. begonnenen Tabelle in Beziehung auf das Verwandeln der Cubikwurzeln aus ganzen Zahlen in Kettenbrüch

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

$\sqrt[3]{65}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	48	4	72	3	4	1	2	1	1
l_i	4	32	1544	6200	406475	1066391	3809960	5223030	11489329	14564007
h_i	16	764	3088	222520	545665	1676429	1067140	4501820	1764479	1310199
k_i	1	577	129	209665	403014	5486389	3145085	15991149	16328486	39424087
a_i	4	193	776	56065	168971	731949	900920	2533789	3434709	5968498
b_i	1	48	193	13944	42025	182044	224069	630182	854251	1484433

$\sqrt[3]{66}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	24	4	36	3	4	2	12	1	47
l_i	4	32	776	3128	103019	295515	1430253	2991447	40622478	44034698
h_i	16	380	1552	55960	138049	526845	1511301	16331499	21299532	1027930324
k_i	2	289	130	52993	108391	978549	375229	56953977	1390090	2613407869
a_i	4	97	392	14209	43019	186285	415589	5173353	5588942	267853627
b_i	1	24	97	3516	10645	46096	102837	1280140	1382977	66280059

$\sqrt[3]{67}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	16	4	24	3	4	3	1	4	32
l_i	4	32	520	2104	46411	144543	480498	1683287	2868379	13460767
h_i	16	252	1040	25016	62081	283437	446640	756149	6765633	211375909
k_i	3	193	131	23809	51656	254645	2129927	906132	632075	348461492
a_i	4	65	264	6401	19467	84269	272274	356543	1698446	54706815
b_i	1	16	65	1576	4793	20748	67037	87785	418177	13469449

$\sqrt[3]{68}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	12	4	18	3	4	15	24	1	2
l_i	4	32	392	1592	26459	88931	392206	5752916	75430739	146103525
h_i	16	188	784	14152	35329	187949	2974924	66279602	3398221	209979869
k_i	4	145	132	13537	31065	38677	363660	141710341	74750873	37066443
a_i	4	49	200	3649	11147	48237	734702	17681085	18415787	54512659
b_i	1	12	49	894	2731	11818	180001	4331842	4511843	13355528

$\sqrt[3]{69}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	9	1	5	2	17	2	1	61	1
l_i	4	29	239	298	1908	4185	38701	152202	225669	9268181
h_i	16	113	97	766	1986	35475	2267	111234	6828333	2214179
k_i	5	352	79	1337	363	37088	154469	5523	16096514	5071015
a_i	4	37	41	242	525	9167	18859	28026	1728445	1756471
b_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4598	6833	421411	428244

$\sqrt[3]{70}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$'g_i$	4	8	4	12	3	3	1	2	1	1
l_i	4	32	264	1080	12075	30912	93316	130084	297870	325535
h_i	16	124	528	6360	16065	32466	29938	106976	60810	−33145
k_i	6	97	134	6145	15659	125782	80011	404846	386345	1094541
a_i	4	33	136	1665	5131	17058	22189	61436	83625	145061

$\sqrt[3]{71}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	7	9	1	6	2	1	3	1	1
l_i	4	33	209	1786	2254	10068	27413	41879	91760	173279
h_i	16	115	813	764	7154	3574	13771	56911	−7030	88549
k_i	7	36	2599	503	8611	30987	18550	148671	166249	236612
a_i	4	29	265	294	2029	4352	6381	23495	29876	53371
b_i	1	7	64	71	490	1051	1541	5674	7215	12889

$\sqrt[3]{72}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	6	4	9	3	3	2	3	1	11
l_i	4	32	200	824	6971	20462	70204	129617	592886	747772
h_i	16	92	400	3616	9241	26692	66562	118961	344308	3845218
k_i	8	73	136	3529	9901	48448	65393	711847	99280	13119209
a_i	4	25	104	961	2987	9922	22831	78415	101246	1192121
b_i	1	6	25	231	718	2385	5488	18849	24337	286556

$\sqrt{73}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	5	1	1	2	1	3	1	2	1
l_i	4	29	75	158	248	741	1029	3316	4640	9921
h_i	16	61	−15	98	142	351	1293	994	3976	1305
k_i	9	136	143	173	883	460	4609	2817	13897	14768
a_i	4	21	25	46	117	163	606	769	2144	2913
b_i	1	5	6	11	28	39	145	184	513	697

$\sqrt[3]{74}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	5	23	1	5	2	4	1	3	19
l_i	4	34	167	3172	3814	22044	43162	167931	295010	1081834
h_i	16	86	1829	1176	10018	20238	69652	55117	551748	9776624
k_i	10	11	5001	998	16031	15850	237583	116709	85978	24752261
a_i	4	21	487	508	3027	6562	29275	35837	136786	2634771

271 $\sqrt[3]{75}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	4	1	1	1	1	7	1	2	6
l_i	4	28	69	117	146	443	717	3510	6500	18488
h_i	16	44	—3	51	—22	319	2343	450	8590	52888
k_i	11	113	114	197	421	148	5853	3475	4513	73387
a_i	4	17	21	38	59	97	738	835	2408	15283
b_i	1	4	5	9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	198	571	3624

$\sqrt[3]{76}$

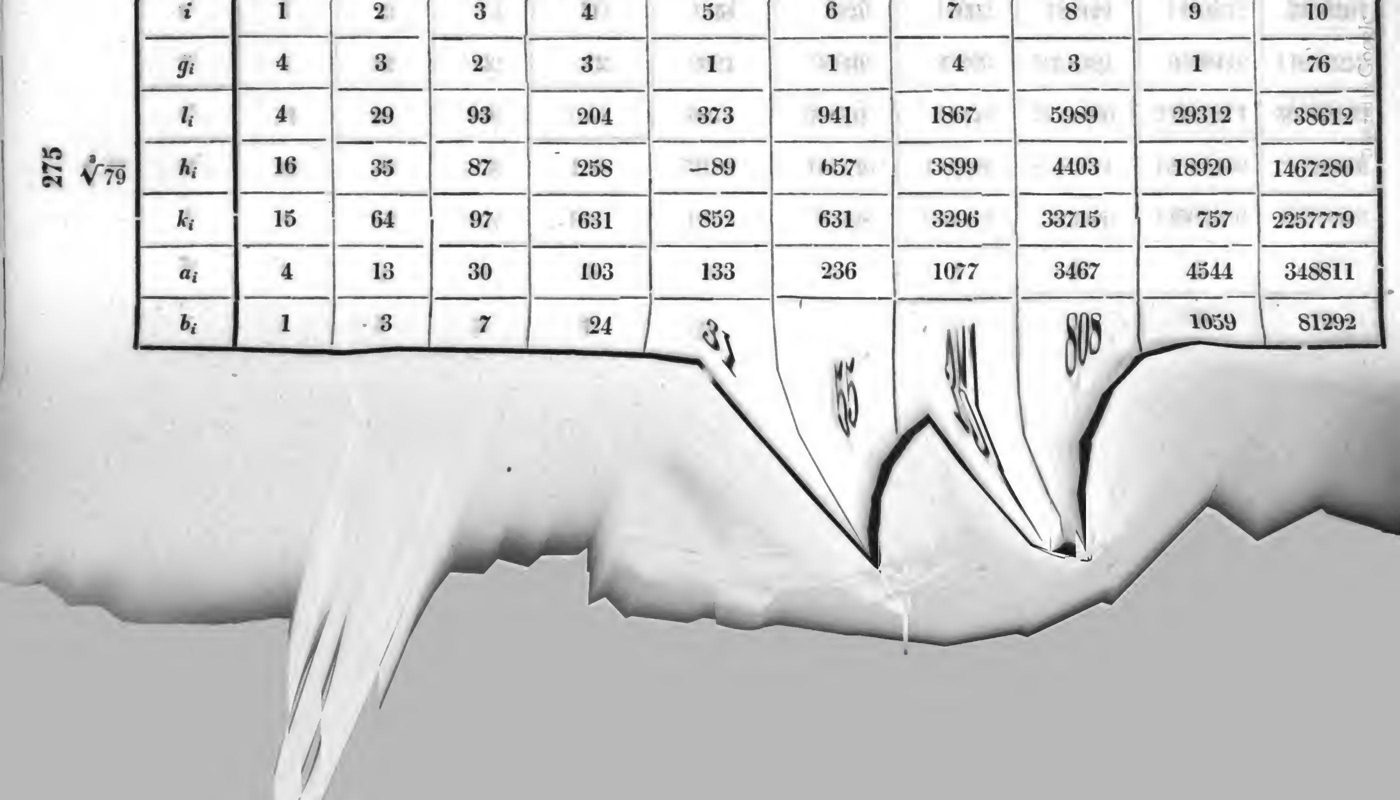
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	4	4	6	3	2	1	426	2	4
l_i	4	32	136	568	3259	6593	27778	39804	14670568	25197496
h_i	16	60	272	1640	4289	1349	19836	8478590	12344152	36742808
k_i	12	49	140	1633	5441	29127	140	11574579	9385412	179474323
a_i	4	17	72	419	1419	3287	4706	2008043	4020792	18091211

$\sqrt[3]{77}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	1	13	1	2	1	1	49	5
l_i	4	23	101	134	1181	1665	2296	8253	14581	616042
h_i	16	17	61	848	199	1751	−1120	7077	359443	1268414
k_i	13	118	15	2029	932	4047	7133	442	195097	2790257
a_i	4	13	17	234	251	736	987	1723	85414	428793
b_i	1	3	4	55	59	173	232	405	20077	100790

$\sqrt{78}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	1	2	120	7	1	45	3	2
l_i	4	26	65	145	401	39458	329154	383499	14201946	45888[illegible]
h_i	16	26	13	199	24095	107140	182556	8713281	16082496	5141052[illegible]
k_i	14	91	79	5	9079	436294	12579	7638409	32485614	25955125
a_i	4	13	17	47	5657	39646	45303	2078281	6280146	14638573
b_i	1	3	4	11	1324	9279	10603	486414	1469845	3426104



275 $\sqrt[3]{79}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	2	3	1	1	4	3	1	76
l_i	4	29	93	204	373	941	1867	5989	29312	38612
h_i	16	35	87	258	−89	657	3899	4403	18920	1467280
k_i	15	64	97	631	852	631	3296	33715	757	2257779
a_i	4	13	30	103	133	236	1077	3467	4544	348811
b_i	1	3	7	24	31	55	[illegible]	808	1059	81292

$\sqrt{80}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	4	4	1	3	1	9	1	5
l_i	4	32	104	368	1517	1796	8544	10683	94774	107588
h_i	16	44	208	536	613	2032	4716	45169	38932	248506
k_i	16	37	144	2053	803	10576	1711	139933	29304	818443
m_i	4	13	66	237	293	1116	1409	13797	15206	89827
b_i	1	3	13	55	68	259	327	3202	3529	20847

$\sqrt[3]{81}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	3	16	1	1	5	1	1	2	16
l_i	4	35	107	612	1701	3227	9498	16947	43889	111879
h_i	16	53	829	−324	1413	7369	−1098	8547	53737	886383
k_i	17	10	1441	1377	928	16867	15849	26218	10351	1005210
a_i	4	13	212	225	437	2410	2847	5257	13361	219033
b_i	1	3	49	52	101	557	658	1215	3088	50623

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	8	9	10
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	93	4	4	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	11914	973442	3332112	10912468
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1792388	5185454	2394902
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	181	[illegible]	1981125	16097922	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\sqrt[3]{83}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	3	5	174	15	1	2	1
l_i	4	22	57	105	418	2206	357859	3507425	4482501	10292453
h_i	16	8	27	177	1100	192026	2485289	664277	4129023	1680929
k_i	19	65	44	119	19	36659	5992714	2573389	14421476	13986485
a_i	4	9	13	48	253	44070	661303	705373	2072049	2777422
b_i	1	2	3	11	58	10103	151603	161706	475015	636721

[illegible] $\sqrt{84}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	1	1	2	1	4	1	33
l_i	4	24	46	62	140	196	652	828	5064	6321
k_i	16	19	9	8	70	112	344	1284	2952	106113
h_i	20	67	71	148	133	764	293	6348	281	53571
m_i	4	9	13	22	35	92	127	600	727	24891
h_i	1	2	3	5	8	21	29	137	166	5615

$\sqrt[3]{85}$

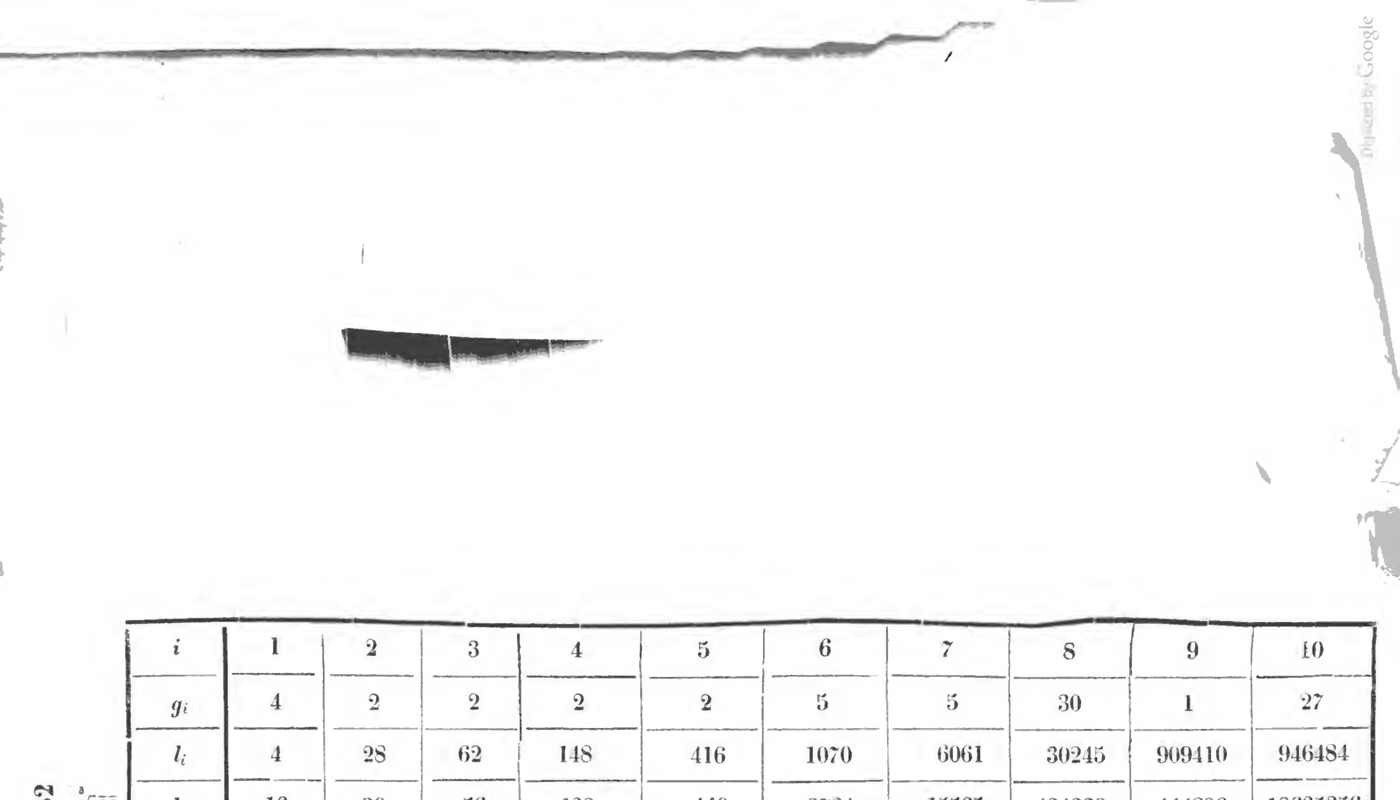
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	1	1	12	58	1	5	1	3
l_i	4	26	33	107	193	2383	110590	119235	600347	867022
h_i	16	16	—9	83	1213	67667	40540	282885	198227	1406038
k_i	21	49	98	23	62	178257	31955	883232	355083	2051243
a_i	4	9	13	22	277	16088	16365	97913	114278	440747
b_i	1	2	3	5	63	3659	3722	22269	25991	100242

$\sqrt[3]{86}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	2	2	2	5	5	30	1	27
l_i	4	28	62	148	416	1070	6061	30245	909410	946484
h_i	16	20	56	122	440	2734	15565	434339	444826	12635356
k_i	22	41	102	269	302	1759	1527	1343749	51530	33575431
a_i	4	9	22	53	128	693	3593	108483	112076	3134535
b_i	1	2	5	12	29	157	814	24577	25391	710134

$\sqrt[3]{87}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	3	7	1	21	1	2	1	12
l_i	4	30	75	227	1886	2165	31431	33429	141457	184409
h_i	16	24	123	653	1006	22453	6813	21801	86227	1036727
k_i	23	33	50	2539	151	53884	20121	163258	22553	3534190
a_i	4	9	31	226	257	5623	5880	17383	23263	296539
b_i	1	2	7	51	58	1269	1327	3923	5250	66923



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	2	2	2	5	5	30	1	27
l_i	4	28	62	148	416	1070	6061	30245	909410	946484

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	3	7	1	21	1	2	1	12
l_i	4	30	75	227	1886	2165	31431	33429	141457	184409
h_i	16	24	123	653	1006	22453	6813	21801	86227	1036727
k_i	23	33	50	2539	151	53884	20121	163258	22553	3534190
a_i	4	9	31	226	257	5623	5880	17383	23263	296539
b_i	1	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	66923

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	4	3	3	2	5	4	1	1
l_i	4	32	72	312	939	3361	8230	39836	67293	241732

$\sqrt[3]{89}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	6	1	1	2	4	6	1	1
l_i	4	34	70	227	425	971	2689	10813	34445	62918
h_i	16	32	194	—37	235	1047	5597	28607	—4975	33448
k_i	25	17	421	388	603	934	2735	63052	57943	93519
a_i	4	9	58	67	125	317	1393	8675	10068	18743
b_i	1	2	13	15	28	71	312	1943	2255	4198

$\sqrt[3]{90}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	12	1	16	1	19	5	1	1
l_i	4	36	72	926	998	17064	19179	331106	750828	2006037
h_i	16	36	396	458	7714	8352	188649	693106	—273384	1528593
k_i	26	9	1322	91	24778	1449	103951	1443934	1732653	143613
a_i	4	9	112	121	2048	2169	43259	218464	261723	480187
b_i	1	2	25	27	457	484	9653	48749	58402	107151

$\sqrt[3]{91}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	2	120	1	16	1	181	5	1	1
l_i	4	38	80	8945	9017	165772	176641	27492097	60566918	168711207
h_i	16	40	4762	4103	69679	87076	16045493	57056379	−23981558	132125847
k_i	27	1	13707	820	235451	1457	8707518	117623297	144729649	82649728
a_i	4	9	1084	1093	18572	19665	3577937	17909350	21487287	39396637
b_i	1	2	241	243	4129	4372	795461	3981677	4777138	8758815

§ 94

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	1	10	1	10	2	3	1	1
l_i	1	12	11	75	1178	1344	12868	25400	56113	96074
h_i	10	8	37	507	530	6002	10588	31568	−855	40816
k_i	98	33	7	1715	188	9885	11006	87681	95219	158236
α_i	1	5	9	119	158	1720	3016	12577	16193	28770
h_i	1	1	2	33	35	383	801	2786	3587	6373

$\sqrt[3]{93}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	7	1	1	1	9	8	1
l_i	4	13	39	72	323	359	1182	1977	16433	141558
h_i	16	7	33	234	17	19	804	9375	54487	70638
k_i	29	32	15	557	376	1201	309	3226	196045	19941
a_i	4	5	9	68	77	145	222	2143	17366	19509
b_i	1	1	2	15	17	32	49	473	3833	4306

i	1	2	[illegible]	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	4	1	5	6	12	1	1
l_i	4	14	37	63	296	436	2596	15112	96015	123760
h_i	16	−6	29	99	134	1214	7856	84476	−3573	31318
k_i	30	31	23	395	114	635	1914	180491	120187	337630
a_i	4	5	9	41	50	291	1796	21843	23639	45482
b_i	1	1	2	9	11	64	395	4804	5199	10003

$\sqrt[3]{95}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	3	2	9	3	1	3	1
l_i	4	15	35	68	272	639	4385	14500	20107	53531
h_i	16	−5	25	94	288	2887	3855	6260	27041	6383
k_i	31	30	31	183	103	2424	18355	8789	80572	69661
a_i	4	5	9	32	73	689	2140	2829	10627	134 56
b_i	1	1	2	7	16	151	469	620	2329	2949

$\sqrt[3]{96}$

i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	2	1	2	30	3	1	1
l_i	4	16	33	57	128	288	786	17868	40695	52468
h_i	16	−4	21	39	32	384	11772	17502	5325	6448
k_i	32	29	39	167	160	39	9880	58197	57793	138464
a_i	4	5	9	23	32	87	2642	8013	10655	18668
b_i	1	1	2	5	7	19	577	1750	2327	4077

$\sqrt[3]{97}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	2	7	6	1	2	1	3
l_i	4	17	31	77	205	1311	6205	7499	24327	29944
h_i	16	−3	17	89	735	3251	1643	5507	11321	31542
k_i	33	28	47	42	341	9456	4571	29834	13755	183059
a_i	4	5	9	23	170	1043	1213	3469	4682	17515
b_i	1	1	2	5	37	227	264	755	1019	3812

$\sqrt[3]{98}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	1	3	4	3	2	1
l_i	4	18	29	42	98	193	691	2758	7154	14001
h_i	16	−2	13	0	56	313	1319	3626	4298	2549
k_i	34	27	55	98	83	251	1359	5390	18299	21447
a_i	4	5	9	14	23	83	355	1148	2651	3799
b_i	1	1	2	3	5	18	77	249	575	824

$\sqrt[3]{99}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	2	14	3	2	1	1
l_i	4	19	27	54	124	332	4117	10089	21258	23111
h_i	16	−1	9	18	158	2312	5083	5895	5274	−3421
k_i	35	26	63	71	35	2143	7586	27153	28385	78364
a_i	4	5	9	14	37	532	1633	3798	5431	9229
b_i	1	1	2	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1174	1995

$\sqrt[3]{100}$

				4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	3	1	3	4	4	1
l_i	4	20	25	66	96	335	550	2116	8042	16976
h_i	16	0	5	36	114	125	940	4154	13436	−4502
k_i	36	25	71	44	449	225	764	3049	30412	37071
a_i	4	5	9	14	51	65	246	1049	4442	.5491
b_i	1	1	2	3	11	14	53	226	957	1183

$\sqrt[3]{101}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	10	1	5	4	1	4
l_i	4	21	23	78	116	1077	1441	6763	29033	38861
h_i	16	1	1	54	542	419	4033	9479	12791	75247
k_i	37	24	79	17	1619	372	2699	38512	12913	174444
a_i	4	5	9	14	149	163	964	4019	4983	23951
b_i	1	1	2	3	32	35	207	863	1070	5143

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	3	1	3	4	4	1
l_i	4	20	25	66	96	335	550	2116	8042	16976
h_i^1	16	0	5	36	114	125	940	4154	13436	−4502
k_i	36	25	71	44	449	225	764	3049	30412	37071
a_i	4	5	9	14	51	65	246	1049	4442	.5491
b_i	1	1	2	3	11	14	53	226	957	1183

$\sqrt[\cdot]{101}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	1	1	10	1	5	4	1	4
l_i	4	21	23	78	116	1077	1441	6763	29033	38861
h_i	16	1	1	54	542	419	4033	9479	12791	75247
k_i	37	24	79	17	1619	372	2699	38512	12913	174444
a_i	4	5	9	14	149	163	964	4019	4983	23951
b_i	1	1	2	3	32	35	207	863	1070	5143

			3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	19	3	2	3	1	6	1
l_i	4	22	44	128	2051	6571	12506	52442	64706	[illegible]
h_i	16	2	62	1210	2395	6301	12044	27892	168442	[illegible]
k_i	38	23	10	1087	4483	6269	64486	15433	687250	27627
a_i	4	5	14	271	827	1925	6602	8527	57764	[illegible]
b_i	1	1	3	58	177	412	1413	1825	12363	[illegible]

$\sqrt[3]{103}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	4	1	80	3	6	1	49
l_i	4	23	41	95	563	699	52953	136749	1056121	1226072
h_i	16	3	53	127	341	28077	73929	323967	595405	29846562
k_i	39	22	37	690	13	27010	35113	1380088	37173	71965813
a_i	4	5	14	61	75	6061	18258	115609	133867	6675092
b_i	1	1	3	13	16	1293	3895	24663	28558	1424005

$\sqrt[5]{104}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	2	1	3	21	1	1	1
l_i	4	24	38	84	223	434	1564	16949	20056	59064
h_i	16	4	44	42	97	788	15862	—477	3584	35424
k_i	40	21	64	265	177	112	32811	19579	62648	27851
a_i	4	5	14	33	47	174	3701	3875	7576	11451
b_i	1	1	3	7	10	37	787	824	1611	2435

$\sqrt[3]{105}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	1	5	2	2	2	27
l_i	4	25	35	56	153	279	1331	2839	9093	22197
h_i	16	5	35	−14	111	687	1009	2329	10689	301623
k_i	41	20	91	139	78	1009	1924	5711	1218	145193
a_i	4	5	14	19	33	184	401	986	2373	65057
b_i	1	1	3	4	7	39	85	209	503	13790

$\sqrt[3]{106}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	2	1	5	1	1	8
l_i	4	26	32	92	116	406	587	1354	4118	7708
h_i	16	6	26	34	72	218	1439	−672	3436	30058
k_i	42	19	118	75	478	161	2793	3446	1393	48774
a_i	4	5	14	19	52	71	407	478	885	7558
b_i	1	1	3	4	11	15	86	101	187	1597

303 $\sqrt[3]{107}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	23	1	5	1	2	4
l_i	4	27	29	128	171	3355	3770	15429	27967	65341
h_i	16	7	17	82	1919	1265	9170	2489	35527	91289
k_i	43	18	145	11	5274	1007	24599	15228	25217	442240
a_i	4	5	14	19	451	470	2801	3271	9343	40643
b_i	1	1	3	4	95	99	590	689	1968	8561

$\sqrt[3]{108}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	4	1	6	1	3	1	3
l_i	4	28	43	135	648	804	4653	5616	19980	34881
h_i	16	8	77	189	324	2232	1617	7344	7020	63603
k_i	44	17	53	837	188	6885	2411	27324	13967	19575
a_i	4	5	19	81	100	681	781	3024	3805	14439
b_i	1	1	4	17	21	143	164	635	799	3032

305 $\sqrt[3]{109}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	2	12	1	19	1	1	1
l_i	4	29	39	173	367	4766	5269	50493	70412	147367
h_i	16	9	61	185	2011	2388	49973	−4749	24668	52287
k_i	45	16	117	46	6777	403	100466	65663	172035	178868
a_i	4	5	19	43	535	578	11517	12095	23612	35707
b_i	1	1	4	9	112	121	2411	2532	4943	

$\sqrt[3]{110}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	1	3	1	6	4	8	7
l_i	4	30	35	136	166	725	1045	7161	30293	232820
h_i	16	10	45	56	194	365	3355	14179	121751	747190
k_i	46	15	181	74	919	235	2629	5559	50653	1165130
a_i	4	5	19	24	91	115	781	3239	26693	190090
b_i	1	1	4	5	19	24	163	676	5571	39673

307 $\sqrt[3]{111}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	6	1	1	2	2	4	3
l_i	4	31	45	201	617	1214	2398	6816	16854	81045
h_i	16	11	105	531	−115	712	2158	6918	32928	127497
k_i	47	14	51	1148	1099	1555	4487	5943	37991	20928
a_i	4	5	24	149	173	322	817	1956	8641	27879
b_i	1	1	[illegible]	[illegible]	36	67	170	407	1798	5801

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	1	1	3	2	1	1	2
l_i	4	32	40	96	221	436	1248	2159	3958	9772
h_i	16	12	80	−24	149	640	780	131	1668	12250
k_i	48	13	176	197	195	944	2939	4089	5720	2093
a_i	4	5	24	29	53	188	429	617	1046	2709

$\sqrt[3]{113}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	21	1	33	12	3	2	1
l_i	4	33	47	262	5687	6195	203471	2137125	4975529	12953957
h_i	16	13	137	2578	2847	104797	1177893	2674225	2465483	5512945
k_i	49	12	19	8265	274	25689	1105006	3824877	15419440	10728473
a_i	4	5	29	614	643	21833	262639	809750	1882139	2691889
b_i	1	1	6	127	133	4516	54325	167491	389307	556798

$308\ \sqrt[3]{112}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	1	1	3	2	1	1	2
l_i	4	32	40	96	221	436	1248	2159	3958	9772
h_i	16	12	80	—24	149	640	780	131	1668	12250
k_i	48	13	176	197	195	944	2939	4089	5720	2093

$\sqrt[3]{113}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	21	1	33	12	3	2	1
l_i	4	33	47	262	5687	6195	203471	2137125	4975529	12953957
h_i	16	13	137	2578	2847	104797	1177893	2674225	2465483	5512945
k_i	49	12	19	8265	274	25689	1105006	3824877	15419440	10728473
a_i	4	5	29	614	643	21833	262639	809750	1882139	2691889
b_i	1	1	6	127	133	4516	54325	167491	389307	556798

$\sqrt[3]{106}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	2	1	5	1	1	8
l_i	4	26	32	92	116	406	587	1354	4118	[illegible]
h_i	16	6	26	34	72	218	1439	−672	3436	30058
k_i	42	19	118	75	478	161	2793	3446	1393	48774
a_i	4	5	14	19	52	71	407	478	885	7558
b_i	1	1	3	4	11	15	86	101	187	1597

$\sqrt[3]{107}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	2	1	23	1	5	1	2	4
l_i	4	27	29	128	171	3355	3770	15429	27967	65341
h_i	16	7	17	82	1919	1265	9170	2489	35527	91289
k_i	43	18	145	11	5274	1007	24599	15228	25217	442240
a_i	4	5	14	19	451	470	2801	3271	9343	40643
b_i	1	1	3	4	95	99	590	689	1968	8561

$\sqrt[3]{108}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	4	1	6	1	3	1	3
l_i	4	28	43	135	648	804	4653	5616	19980	3488[illegible]
h_i	16	8	77	189	324	2232	1617	7344	7020	63603
k_i	44	17	53	837	188	6885	2411	27324	13967	19575
a_i	4	5	19	81	100	681	781	3024	3805	14439
b_i	1	1	4	17	21	143	164	635	799	3032

$\sqrt[5]{109}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	2	12	1	19	1	1	1
l_i	4	29	39	173	367	4766	5269	50493	70412	147367
h_i	16	9	61	185	2011	2388	49973	−4749	24668	52287
k_i	45	16	117	46	6777	403	100466	65663	172035	178868
a_i	4	5	19	43	535	578	11517	12095	23612	35707
b_i	1	1	4	9	112	121	2411	2532	4943	7475

$\sqrt[3]{110}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	3	1	3	1	6	4	8	7
l_i	4	30	35	136	166	725	1045	7161	30293	232820
h_i	16	10	45	56	194	365	3355	14179	121751	747190
k_i	46	15	181	74	919	235	2629	5559	50653	1165130
a_i	4	5	19	24	91	115	781	3239	26693	190090
b_i	1	1	4	5	19	24	163	676	5571	39673

307 $\sqrt[3]{111}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	6	1	1	2	2	4	3
l_i	4	31	45	201	617	1214	2398	6816	16854	81045
h_i	16	11	105	531	−115	712	2158	6918	32928	127497
k_i	47	14	51	1148	1099	1555	4487	5943	37991	20928
a_i	4	5	24	149	173	322	817	1956	8641	27879
b_i	1	1	5	31	36	67	170	407	1798	5801

$\sqrt[3]{112}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	4	1	1	3	2	1	1	2
l_i	4	32	40	96	221	436	1248	2159	3958	9772
h_i	16	12	80	—24	149	640	780	131	1668	12250
k_i	48	13	176	197	195	944	2939	4089	5720	2093
a_i	4	5	24	29	53	188	429	617	1046	2709
b_i	1	1	5	6	11	39	89	128	217	562

309 $\sqrt[3]{113}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	21	1	33	12	3	2	1
l_i	4	33	47	262	5687	6195	203471	2137125	4975529	12953957
h_i	16	13	137	2578	2847	104797	1177893	2674225	2465483	5512945
k_i	49	12	19	8265	274	25689	1105006	3824877	15419440	10728473
a_i	4	5	29	614	643	21833	262639	809750	1882139	2691889
b_i	1	1	6	127	133	4516	54325	167491	389307	556798

$\sqrt[3]{114}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	5	1	1	1	1	2	4	5
l_i	4	34	41	134	210	327	640	1356	3804	15238
h_i	16	14	101	−8	84	33	280	1512	7812	33326
k_i	50	11	235	202	411	673	818	1329	4610	68039
a_i	4	5	29	34	63	97	160	417	1828	9557
b_i	1	1	6	7	13	20	33	86	377	1971

311. $\sqrt[3]{115}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	6	3	2	1	1	1	821	2
l_i	4	35	45	278	692	1475	1535	5858	9309	7521685
h_i	16	15	145	354	398	385	−325	4648	3820823	7392415
k_i	51	10	141	523	1873	1920	5533	17	5671254	535715
a_i	4	5	34	107	248	355	603	958	787121	1575200
b_i	1	1	7	22	51	73	124	197	161861	323919

$\sqrt[3]{116}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	7	7	1	2	4	7	1	2
l_i	4	36	47	330	1568	2732	8508	33637	159944	287216
h_i	16	16	181	996	242	3412	17652	103387	22920	368648
k_i	52	9	73	2564	1487	2980	7327	263331	155068	257491
a_i	4	5	39	278	317	912	3965	28667	32632	93931
b_i	1	1	8	57	65	187	813	5878	6691	19260

$\sqrt[3]{117}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	8	5	1	4	3	6	4	2
l_i	4	37	47	342	1665	2389	11816	38680	224128	760778
h_i	16	17	203	648	675	5191	17486	115348	396440	504548
k_i	53	8	109	2313	766	5669	9361	84869	578609	1558045
a_i	4	5	44	225	269	1301	4172	26333	109504	245341
b_i	1	1	9	46	55	266	853	5384	22389	50162

$\sqrt[3]{118}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	9	1	1	20	1	4	1	1
l_i	4	38	45	146	510	952	15436	18010	56378	71159
h_i	16	18	205	−104	468	9170	5314	35348	3020	11761
k_i	54	7	351	406	71	24606	5831	91726	74179	195741
a_i	4	5	49	54	103	2114	2217	10982	13199	24181
b_i	1	1	10	11	21	431	452	2239	2691	4930

$\sqrt[3]{119}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	11	3	2	1	3	1	6	1
l_i	4	39	47	490	1106	3207	4245	18658	22796	178427
h_i	16	19	269	616	490	1611	4695	9718	59810	95821
k_i	55	6	253	861	3697	1952	23353	5419	238237	15000
a_i	4	5	59	182	423	605	2238	2843	19296	22139
b_i	1	1	12	37	86	123	455	578	3923	4501

$\sqrt[\circ]{120}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	13	1	3	1	21	4	25	1
l_i	4	40	45	486	516	2715	3540	77376	299441	7984850
h_i	16	20	285	156	594	1605	87920	154284	3551549	4133860
k_i	56	5	771	224	3309	245	28824	18149	11536399	34720
a_i	4	5	69	74	291	365	7956	32189	812681	844870
b_i	1	1	14	15	59	74	1613	6526	164763	171289

317

$\sqrt[3]{121}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	17	1	1	4	1	1	1	5
l_i	4	41	47	302	791	1469	4408	5221	15325	24270
h_i	16	21	401	−146	635	2545	394	419	9685	57600
k_i	57	4	703	645	526	6953	5615	15744	6791	123119
a_i	4	5	89	94	183	826	1009	1835	2844	16055
b_i	1	1	18	19	37	167	204	371	575	3246

$\sqrt[3]{122}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	23	1	3	1	36	4	43	1
l_i	4	42	47	836	866	4713	6039	222589	877736	30787486
h_i	16	22	533	256	994	2853	109983	444385	18411504	11498246
k_i	58	3	1369	374	5707	247	83143	30747	49198990	8699477
a_i	4	5	119	124	491	615	22631	91139	3941608	4032747
b_i	1	1	24	25	99	124	4563	18376	794731	813107

$\sqrt[3]{123}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	36	3	2	1	13	4	265	2
l_i	4	43	49	1552	3170	11939	17955	252417	1026847	240278793
h_i	16	23	893	1928	932	7837	119595	513333	135828793	207873153
k_i	59	2	815	2549	12871	1984	93003	5812	188053793	131682066
a_i	4	5	184	557	1298	1855	25413	103507	27454768	55013043
b_i	1	1	37	112	261	373	5110	20813	5520555	11061923

$\sqrt[3]{124}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	4	1	73	1	3	1	111	4	133	7
l_i	4	44	49	2586	2616	14711	18538	2073652	8323199	1104472922
h_i	16	24	1781	756	2994	9101	1032796	4144886	553641977	3847493416
k_i	60	1	4367	1124	17705	249	776612	93745	236873557	312621492
a_i	4	5	369	374	1491	1865	308506	835889	111381743	780508090
b_i	1	1	74	75	299	374	41813	167626	22336071	156520123

XXIX.

Wenn zwei der vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte sich unendlich entfernen sollen, wie müssen alsdann die Coefficienten ihrer Gleichungen zusammenhangen?

Von dem

Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel

zu Utrecht.

Bevor wir zur eigentlichen Aufgabe übergehen, wollen wir uns vorher mit der ihr verwandten Aufgabe beschäftigen:

I. Welcher Zusammenhang muss, sollen zwei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche reelle oder imaginäre Asymptote haben, zwischen den Coefficienten ihrer Gleichungen stattfinden?

um nachher diejenigen Fälle zu betrachten, in welchen zwei Kegelschnitte, ohne den Besitz einer gemeinschaftlichen Asymptote, dennoch die in der primitiven Aufgabe gestellten Forderungen befriedigen.

Es scheint unsere Aufgabe eine ganz bestimmte zu sein und daher auch nur eine einzige ganz bestimmte Antwort zu erheischen. Bedenken wir aber, dass jeder Kegelschnitt, je nach der verschiedenen Lage der Coordinatenaxen, durch verschiedene Gleichungen dargestellt werden kann, so sehen wir, dass in der Frage unbestimmt gelassen worden ist, welche Gleichungen man eigentlich gemeint hätte, und dass also unsere Aufgabe I. mehrere partielle Aufgaben enthält, deren jede ihre eigene Antwort erfordert, z. B.

II. Wenn der Scheitel eines gewissen Kegelschnitts als Coordinaten-Ursprung gewählt wird, und eine der Axen dieses Kegelschnitts als Axe $y=0$, wie müssen alsdann die Coefficienten der Gleichung dieses Kegelschnitts, von denen die der Gleichung eines anderen Kegelschnitts abhangen, d. h. wie müssen die Gleichungen

$$y^2 = Ax + B,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

mit einander verbunden sein, damit zwei der vier Asymptoten der Kegelschnitte einander decken?

Wir wollen uns jedoch hier nicht mit diesen speciellen Aufgaben beschäftigen, sondern uns unter der Aufgabe I. die allgemeinere Aufgabe denken, worin nach demjenigen zur Asymptoten-Coincidirung erforderlichen Coefficientenzusammenhang gefragt wird, welcher bei jeder Lage der Coordinaten-Axen stattfinden muss, d. h. welcher die Gleichungen

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

zum Ausdruck zweier eine gemeinschaftliche Asymptote besitzenden Kegelschnitte macht.

Es genügt jedoch diese Annahme noch nicht, um unsere Aufgabe I. zu einer ganz bestimmten zu machen. Es war nämlich in der Frage nur im Allgemeinen von den Coëfficienten die Rede, während es dagegen bei jeder Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

einigermaassen unbestimmt ist, welche man als ihre Coefficienten betrachten soll, weil alle sechs Coefficienten, ohne dass die Bedeutung der Gleichung sich ändere, mit einem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt werden dürfen. Es ist also auch hier zwischen der allgemeineren Aufgabe III. und der specielleren Aufgabe IV. zu unterscheiden; wobei wir Deutlichkeits halber die zwei Gruppen der sechs Coefficienten, wenn zwei solche ausgewählt worden sind, welche jede einer bestimmten Bedingung unterworfen sein soll, durch $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$, wenn sie dagegen ganz willkührlich bleiben sollen, durch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'$ andeuten wollen?

III. Welcher ist der zur Asymptoten-Coincidirung erforderliche Zusammenhang zwischen den Coefficienten zweier Kegelschnittsgleichungen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$
$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' xy + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' = 0,$$

man möge nun die zwei bestimmten Gruppen unserer jetzigen zwölf Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \alpha', \beta', \ldots$ oder zwei andere Gruppen

$$\alpha M,\ \beta M, \ldots, \alpha' M',\ \beta' M', \ldots\ldots$$

oder zwei Gruppen

$$\alpha N,\ \beta N, \ldots \alpha' N',\ \beta' N' \ldots\ldots$$

als Coefficienten betrachten?

IV. Wenn jede der zwei Gruppen der sechs Coefficienten einer gewissen Bedingung unterworfen sein soll, z. B. dass F und F' die Einheit darstellen sollen, welcher Zusammenhang ist alsdann zwischen den bestimmten Coefficienten solch eines Ausdrucks

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+1=0,$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+1=0$$

zur Asymptoten-Coincidirung erforderlich?

Da ein System zweier Kegelschnitte, soll es die Eigenschaft der Asymptoten-Coincidirung besitzen, zweien Bedingungen genügen muss, nämlich erstens dass die Kegelschnitte einander berühren, zweitens dass diese Berührung in unendlicher Entfernung stattfinde, so besteht die Antwort auf die allgemeine Aufgabe III. aus einem System zweier Gleichungen

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0,$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0.$$

Die Antwort dagegen zu jeder speciellen Aufgabe der Art IV besteht aus einem System von vier Gleichungen: Es sind nämlich alsdann erstens die Coefficienten des einen Kegelschnitts, der die gerade benützte Coefficienten-Wahl ausdrückenden Bedingung

$$f(ABCDEF)=0$$

unterworfen, zweitens die Coefficienten des anderen Kegelschnitts einer ähnlichen Gleichung

$$\mathrm{F}(A'B'C'D'E'F')=0;$$

endlich finden die von der Coefficienten-Wahl unabhängigen Bedingungen der Aufgabe III.

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0$$

auch bei unseren Coefficienten statt, so dass die Coefficienten drittens und viertens den Gleichungen

$$\psi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0$$
$$\chi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0$$

unterworfen sind. Man bekommt also zur Antwort auf Aufgabe IV. entweder das System dieser vier Gleichungen selber, oder in den meisten Fällen ein System vier anderer Gleichungen

$$\varphi_1(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0\quad \varphi_2(A...A'...)=0\quad \varphi_3(A...A'...)=0$$
$$\varphi_4(A...A'...)=0$$

deren jede eine Resultante-Gleichung zweier oder mehrerer der vier vorigen Gleichungen ist. Bei jeder anderen Coefficienten-Wahl hat man eine andere Aufgabe der Art IV. zu lösen und es besteht die Antwort aus einem System vier anderer Gleichungen

$$\varphi_5(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0\quad \varphi_6(A...A'...)=0\quad \varphi_7(A...A'...)=0$$
$$\varphi_8(A...A'...)=0$$

worin sowohl die Functionen φ_5 φ_6 φ_7 φ_8 von den Functionen φ_1 φ_2 φ_3 φ_4 verschieden sind, als auch die Zeichen

$$ABCDEF\ A'B'C'D'E'F$$

andere Grössen, als vorher, bedeuten, weil von den vier Gleichungen, deren jede der vier letzten eine Resultante ist, nur die zwei

$$\psi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0,$$
$$\chi(ABCDEF\ A'B'C'D'E'F')=0$$

mit den beiden der vorigen Coefficienten-Wahl identisch sind, während die beiden anderen

$$f'(ABCDEF)=0,$$
$$F'(A'B'C'D'E'F)=0$$

von denen der vorigen Aufgabe verschieden sind und die jetzige Coefficienten-Wahl ausdrücken.

Zur Beantwortung der allgemeinen Aufgabe III. können wir anfangen mit der leichteren Arbeit, wobei wir die Antwort auf eine gewisse specielle Aufgabe der Art IV. suchen, um nachher hiermit die gesuchte Antwort zur Aufgabe III. abzuleiten. Je nach den verschiedenen Coefficienten-Wahlen nun, womit man anfängt, d. h. je nach den verschiedenen Aufgaben IV., welche man als intermediäre Hülfsmittel benutzt, gibt es verschiedene Methoden, die Aufgabe III. zu lösen.

Wir wollen damit anfangen, bei derjenigen Wahl der sechs Coefficienten des ersten Kegelsschnitts die Aufgabe IV. zu lösen, wobei man identisch hat

$$(1)\quad Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(ax+by+1)(cx+dy+1)+e$$

d. h. nach Entwickelung

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(ac)x^2+(bd)y^2+(ad+bc)xy$$
$$+(a+c)x+(b+d)y+(e+1).$$

Es sind daher die sechs Coefficienten $ABCDEF$ hier der Bedingung unterworfen, dass sie in den $6-1=5$ Grössen $abcde$ ausgedrückt werden können, und zwar durch die sechs Gleichungen

$$A=ac \quad B=bd \quad C=ad+bc \quad D=a+c \quad E=b+d \quad F=e+1$$

d. h. dass sie zusammenhängen durch die, durch Elimination der $abcde$ aus diesen Gleichungen sich ergebende Endgleichung. Combiniren wir, um diese zu erlangen, Nr. 1. mit Nr. 4. und Nr. 2. mit Nr. 5., so ergiebt sich

$$(2) \quad a=\frac{1}{2}(D\pm\sqrt{D^2-4A}) \quad b=\frac{1}{2}(E\pm\sqrt{E^2-4B})$$

$$c=\frac{1}{2}(D\mp\sqrt{D^2-4A}) \quad d=\frac{1}{2}(E\mp\sqrt{E^2-4B}),$$

durch deren Substitution in Nr. 3. wir

$$C=ad+bc=\frac{1}{2}DE-\frac{1}{2}\sqrt{(D^2-4A)(E^2-4B)}$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$C^2-4AB=CDE-BD^2-AE^2$$

für die, die Natur unserer jetzigen Coefficienten-Wahl ausdrückende Gleichung bekommen. Unterwerfen wir ebenso die Coefficienten des anderen Kegelschnitts der Identität

$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(a'x+b'y+1)(c'x+d'y+1)+e',$$

so ergibt sich für zwei der vier bei dieser Coefficienten-Wahl die Antwort der Aufgabe IV. darstellenden Gleichungen

$$(3) \quad \begin{array}{c} C^2-4AB=CDE-BD^2-AE^2 \\ C'^2-4A'B'=C'D'E'-B'D'^2-A'E'^2. \end{array}$$

Für die beiden anderen der vier Antwortsgleichungen bekommen wir das eine oder das andere der vier Paare Gleichungen

$$\begin{array}{cccc} a=a' & a=c' & c=a' & c=c' \\ b=b' & b=d' & d=b' & d=d', \end{array}$$

welche wir jedoch, da nicht nach dem Zusammenhange zwischen den Constanten $abcdabcd$, sondern nach demjenigen zwischen den Coefficienten gefragt war, vorher mittelst der Gleichungen (2) transformiren müssen, wodurch wir das eine oder das andere der Gleichungen-Paare

$$D \pm \sqrt{D^2-4A} = D' \pm \sqrt{D'^2-4A'} \qquad D \pm \sqrt{D^2-4A} = D' \mp \sqrt{D'^2-4A'}$$

$$E \pm \sqrt{E^2-4B} = E' \pm \sqrt{E'^2-4B'} \qquad E \pm \sqrt{E^2-4B} = E' \mp \sqrt{E'^2-4B'}$$

$$D \mp \sqrt{D^2-4A} = D' \pm \sqrt{D'^2-4A'} \qquad D \mp \sqrt{D^2-4A} = D' \mp \sqrt{D^2-4A'}$$

$$\mp \qquad\qquad \pm \qquad\qquad \mp \qquad\qquad \mp$$

bekommen.

Zur besseren Einsicht in die Bedeutung dieser verschiedenen Doppelzeichen $\pm$ bedenke man, dass, im Falle die Coefficienten $ABCDEF$ sechs bestimmte wären, auch der Kegelschnitt

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

ein ganz bestimmter wäre, und daher zwei bestimmte Asymptoten hätte, und dass daher die Grössen a b c d, je nach der verschiedenen Ordnung, in welcher die Asymptoten auf einander folgend gedacht würden, d. h. jenachdem der Kegelschnitt als

$$(ax + by + 1)(cx + dy + 1) + e = 0$$

oder als

$$(cx + dy + 1)(ax + by + 1) + e = 0$$

betrachtet würde, auf zweifache Weise durch die Coefficienten $ABDE$ ausgedrückt werden könnten, da man der Grösse a entweder den Werth $\frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2-4A})$ oder den Werth $\frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2-4A})$ zuertheilen könnte, hierdurch aber zugleich bestimmt wäre, welche der Zeichen $+$ oder $-$ man bei den Radicalen der drei übrigen Grössen b c d nehmen sollte. Hätte man daher ein System zweier Gleichungen

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

mit zwölf bestimmten und den Bedingungen (3) unterworfenen Coefficienten, so könnte man zwar die Zeichen $+$ oder $-$ der in a und a' vorkommenden Radicale willkührlich auswählen; es wären aber alsdann die Zeichen der in b c d b' c' d' vorkommenden Radicale bestimmt; und es wäre daher nur auf vier verschiedene Weisen möglich, dass unsere Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Asymptote hätten, nämlich in den vier Fällen, worin, bei den verschiedenen Bedeutungen von a und a', das Gleichungen-Paar $\begin{matrix} a=a' \\ b=b' \end{matrix}$ stattfände, z. B. in den vier Fällen:

$$D+\sqrt{D^2-4A}=D'+\sqrt{D'^2-4A'} \quad D+\sqrt{D^2-4A}=D'-\sqrt{D'^2-4A'}$$
$$E-\sqrt{E^2-4B}=E'+\sqrt{E'^2-4B'} \quad E-\sqrt{E^2-4B}=E'-\sqrt{E'^2-4B'}$$

$$D-\sqrt{D^2-4A}=D'+\sqrt{D'^2-4A'} \quad D-\sqrt{D^2-4A}=D'-\sqrt{D'^2-4A'}$$
$$+ \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad -$$

da die aus der Interpretation der drei übrigen Paare Gleichungen

$$a=c' \quad c=a' \quad c=c'$$
$$b=d' \quad d=b' \quad d=d'$$

bei vierfacher Bedeutung der a und a' sich ergebenden $4\times3=12$ Gleichungen-Paare respective mit den vier vorigen identisch sein würden, die 12 übrigen dagegen der 16, aus der Combination der vier Doppelzeichen $\pm$ der Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} D\pm\sqrt{D^2-4A}&=D'\pm\sqrt{D'^2-4A'} \\ E\pm\sqrt{E^2-4B}&=E'\pm\sqrt{E'^2-4B'} \end{aligned}$$

hervorgehenden Fälle keine Asymptoten-Coincidirung, sondern gewisse andere Zusammenhänge der beiden Kegelschnitte andeuten würden. Sind nun, wie in unserer Aufgabe der Fall war, die Coefficienten $ABCDEF$ alle unbestimmt, so weiss man zwar nicht, welche die vier Combinationen der vier Doppelzeichen der Radicale seien, welche die Gleichungen (4) zum Ausdruck des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote machen; man weiss aber, dass nicht alle sechszehn Combinationen zugleich als zur gesuchten Antwort gehörig betrachtet werden können; sodass es zwar erlaubt ist, die Zeichen der in a und a' vorkommenden zwei Radicale als zweideutig zu betrachten und die Gleichung

$$D\pm\sqrt{D^2-4A}=D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}$$

als das $=0$ Sein des Productes der vier Functionen

$$D'-D+\sqrt{D'^2-4A'}-\sqrt{D^2-4A}$$

$$D'-D+\sqrt{D'^2-4A'}+\sqrt{D^2-4A}$$

$$D'-D-\sqrt{D'^2-4A'}-\sqrt{D^2-4A}$$

$$D'-D-\sqrt{D'^2-4A'}+\sqrt{D^2-4A}$$

d. h. nach Entwickelung als

$$(A'-A)^2=(D'-D)(A'D-AD')$$

zu betrachten, die Zeichen aber der übrigen Radicale alsdann nicht mehr willkührlich sind, und es daher nicht erlaubt ist, auch

die andere Gleichung in ähnlicher Weise rational zu machen, und die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned}(A'-A)^2&=(D'-D)(A'D-AD')\\(B'-B)^2&=(E'-E)(B'E-BE')\end{aligned}$$

als diejenigen zwei Gleichungen zu betrachten, welche in Verbindung mit den zwei Gleichungen (3) die Antwort auf unsere Aufgabe IV. darstellen sollten. Denn es würden diese Gleichungen (5) alle 16 Combinationen der Doppelzeichen der Gleichungen (4) darstellen, und daher eine Eigenschaft ausdrücken, welche nicht nur den Kegelschnitten

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1)-12\equiv 8x^2+15y^2+22xy+6x+8y-11=0$$

$$(2x+3y+1)(6x+7y+1)-11\equiv 12x^2+21y^2+32xy+8x+10y-10=0$$

zukäme, sondern auch den Kegelschnitten

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1)-12\equiv 8x^2+15y^2+22xy+6x+8y-11=0$$

$$(2x+4y+1)(6x+5y+1)-11\equiv 12x^2+20y^2+34xy+8x+9y-10=0$$

welche statt des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote die Eigenscheft $\begin{matrix}a=a'\\d=d'\end{matrix}$ besitzen.

Es sind die beiden Gleichungen (4) auch unter anderer Form darstellbar, welche, obschon weniger einfach, in gewissen Fällen jedoch nützlich sein kann. Da nämlich $A=ac$, so ist $\frac{1}{a}=\frac{c}{A}$, und daher

$$\frac{1}{D\pm\sqrt{D^2-4A}}=\frac{D\mp\sqrt{D^2-4A}}{A}.$$

Transformiren wir in ähnlicher Weise die drei Functionen

$$E\pm\sqrt{E^2-4B}\quad D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}\quad E'\pm\sqrt{E'^2-4B'},$$

so nehmen die Gleichungen (4) folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{D\pm\sqrt{D^2-4A}}{A}&=\frac{D'\pm\sqrt{D'^2-4A'}}{A}\\ \frac{E\pm\sqrt{E^2-4B}}{B}&=\frac{E'\pm\sqrt{E'^2-4B'}}{B'}.\end{aligned}$$

Es sind diese Gleichungen (4) oder (6) Resultante-Gleichungen der beiden (3) und der noch zu findenden, bei jeder Coefficienten-Wahl zur Asymptoten-Concidirung erforderlichen Gleichungen

$$\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0$$
$$\chi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta')=0.$$

Wir können daher jedes andere Paar Resultante - Gleichungen der nämlichen vier Gleichungen, statt der beiden Gleichungen (4) oder (6), als die Gleichungen unserer jetzigen Antwort betrachten, d. h. wir können die Gleichungen (4) oder (6) mittelst der Gleichungen (3) transformiren, und zwar nicht nur durch eine blosse, aus der Entwickelung als erlaubt sich ergebende, Aenderung der Art des Zusammenhanges der Grössen $AA'DD'$, wie diejenige der (4) und (6), sondern auch durch solch eine Aenderung, wobei z. B. die unter der Form

$$f(AA'DD')=0$$

gegebene Gleichung (4) oder (6) von den Grössen D und D' befreit und zur Form

$$F(ABCE\ \ A'B'C'E')=0$$

gebracht würde. Umgekehrt kann es sich daher auch sehr wohl ereignen, dass man mittelst einer anderen Methode, ohne dass darum ein Fehler in die Rechnung eingeschlichen wäre, ein von den Gleichungen (4) oder (6) verschiedenes Paar Gleichungen zur Antwort bekommen hätte. Wie z. B. der Fall gewesen sein würde, wenn wir zur Erlangung des Zusammenhanges (2), statt dessen dass wir die Gleichung $C=ad+bc$ unbenützt gelassen und uns nur der Nr. 1), 2), 4), 5) bedient hätten, uns auch der Gleichung $C=ad+bc$ bedient hätten, und daher a als Function der vier Grössen $ABCE$ bekommen hätten.

Da unsere nach der vorigen Methode erhaltene Antwort irrational war und nicht rational gemacht werden konnte, ohne Mehreres als die gefragte Antwort auszudrücken, so wollen wir versuchen, mittelst einer anderen Methode eine Antwort rationaler Form zu bekommen. Wir wollen wiederum die vorige Coefficienten-Wahl nehmen, d. h. wo die Coefficienten den Bedingungen (3) unterworfen sind. Es ist daher der erste Kegelschnitt unter der Form (1)

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(ax+by+1)(cx+dy+1)+e=0$$

und der zweite Kegelschnitt unter der ähnlichen Form

$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(a'x+b'y+1)(c'x+d'y+1)+e'=0$$

darstellbar, statt der wir jedoch, mit Inachtnehmung, dass die Grössen a' und b', sollen die beiden Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Asymptote haben, respective mit den Grössen a und b identisch sein müssen, folgende Form nehmen wollen:

$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(ax+by+1)(c'x+d'y+1)+e'=0$$

Entwickeln wir, so ergibt sich, dass die zehn Coefficienten



$$A\,B\,C\,D\,E\;\;A'\,B'\,C'\,D'\,E'$$

den vier Bedingungen unterworfen sind, dass sie in den sechs Grössen $a\ b\ c\ d\ c'\ d'$ müssen ausgedrückt werden können, und zwar durch die zehn Gleichungen

$$A=ac \quad B=bd \quad C=ad+bc \quad D=a+c \quad E=b+d$$
$$A'=ac' \quad B'=bd' \quad C'=ad'+bc' \quad D'=a+c' \quad E'=b+d'$$

so dass sie zusammenhängen durch die vier, aus diesen zehn Gleichungen durch Elimination der $a\ b\ c\ d\ c'\ d'$ zu bekommenden Gleichungen, zu deren Erlangung wir die vier letzten Gleichungen combiniren, und aus ihnen

$$c'-c=D'-D \quad d'-d=E'-E$$

erhalten könnten, deren Verbindung mit den vier ersten uns

$$A'-A=a(D'-D) \quad B'-B=b(E'-E)$$

würde gegeben haben; und wenn wir die hieraus sich ergebenden Werthe der a und b mit ihren nach der vorigen Methode bekommenen Werthen (2) respective identificirten, so erhielten wir die Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{A'-A}{D'-D}=D\pm\sqrt{D^2-4A} \qquad \frac{B'-B}{E'-E}=E\pm\sqrt{E^2-4B}$$

welche jedoch von den Gleichungen (4) und (6) nur der Form nach, nicht wesentlich verschieden sein würden, da sich durch Rationalmachung aus ihnen ergäbe

$$[A'-A-D(D'-D)]^2=(D'-D)^2\times(D^2-4A)$$
$$[B'-B-E(E'-E)]^2=(E'-E)^2\times(E^2-4B)$$

d. h. nach Entwickelung die Gleichungen (5). Die beiden dagegen bisher unbenützten Gleichungen liefern uns:

$$C=ad+bc=a\left(\frac{B}{b}\right)+b\left(\frac{A}{a}\right),$$
$$C'=ad'+bc'=a\left(\frac{B'}{b}\right)+b\left(\frac{A'}{a}\right),$$
$$C=ad+bc=a(E-b)+b(D-a)=aE+bD-2ab,$$
$$C'=ad'+bc'=a(E'-b)+b(D'-a)=aE'+bD'-2ab,$$
$$C=ad+bc=(D-c)d+(E-d)c=dD+cE-2cd,$$
$$C'=ad'+bc'=(D'-c')d'+(E'-d')c'=d'D'+c'E'-2c'd'$$

u. s. w.

und wenn wir hierin die Werthe

$$a=\frac{A'-A}{D'-D}\quad b=\frac{B'-B}{E'-E}\quad c'=\frac{A'}{a}=\frac{A'(D'-D)}{A'-A}\quad d'=\frac{B'}{b}=\frac{B'(E'-E)}{B'-B}$$

substituiren, so bekommen wir für die gesuchten zwei Gleichungen unserer Antwort entweder die Gleichungen

(8)

$$\frac{(A'-A)(B'-B)(D'-D)(E'-E)(C)}{C'}$$
$$=\frac{(A'-A)^2(E'-E)^2(B)}{B'}+\frac{(B'-B)^2(D'-D)^2(A)}{A'}$$

oder aber die Gleichungen

$$\frac{(A'-A)(E'-E)(E)}{E'}+\frac{(B'-B)(D'-D)(D)}{D'}$$
$$=\frac{(D'-D)(E'-E)(C)}{C'}+2(A'-A)(B'-B)$$

oder endlich, wenn keine der vorigen Formen uns gefällt, die Gleichungen

$$\frac{(A'-A)(E'-E)(BD)}{B'D'}+\frac{(B'-B)(D'-D)(AE)}{A'E'}$$
$$=\frac{(A'-A)(B'-B)(C)}{C'}+\frac{(D'-D)(E'-E)(2AB)}{2A'B'}$$

welche Gleichungen alle, obwohl unter rationaler Form dargestellt, nur denjenigen Kegelschnitten zukommen, welche eine gemeinschaftliche Asymptote haben, nicht, wie die Gleichungen (5), auch denjenigen, welche die Eigenschaft $\begin{matrix}a=a'\\d=d'\end{matrix}$ besitzen. Denn hätten wir die Grössen a' und d' den Grössen a und d, statt a' und b' den a und b, respective identisch gesetzt, so hätten wir

$$a=\frac{A'-A}{D'-D}\quad d=\frac{B'-B}{E'-E}\quad b=\frac{B}{d}=\frac{B(E'-E)}{B'-B}$$

bekommen, deren Substitution in irgend zwei der Werthe der C und C' uns, weil nur der Werth des a mit dessen früherem Werthe identisch ist, die der b und d dagegen von deren früheren Werthen verschieden sind, niemals zwei der Gleichungen (8) hätte liefern können, sondern uns z. B. die zwei folgenden

$$\frac{(A-A)(B'-B)(D'-D)(E'-E)(C)}{C'}$$
$$=\frac{(A'-A)^2(B'-B)^2+(D'-D)^2(E'-E)^2(AB)}{A'B'}$$

geliefert haben würde.

Aus unseren auf die Aufgabe IV. bekommenen Antwortsgleichungen (4) oder (6) oder (7) oder (8) wollen wir jetzt die Ant-

wort zur allgemeineren Aufgabe III. herzuleiten suchen. Nehmen wir also an, dass die Gleichung

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

eines der Kegelschnitte der Aufgabe III. solche Coefficienten hätte, welche der Bedingung (3) unserer vorigen Coefficienten-Wahl nicht genügten, so können wir immer, durch Multiplicirung aller Coefficienten mit einem unbestimmten Factor N, uns eine neue Function zweiten Grades denken, deren Coefficienten der genannten Bedingung genügten, d. h. so, dass man identisch hätte

$$\alpha N x^2 + \beta N y^2 + \gamma N xy + \delta N x + \varepsilon N y + \zeta N \equiv (ax + by + 1)(cx + dy + 1) + e.$$

Durch Entwickelung ergibt sich

$$\alpha N = ac \quad \beta N = bd \quad \gamma N = ad + bc \quad \delta N = a + c \quad \varepsilon N = b + d,$$

woraus man

$$N = \frac{\gamma^2 - 4\alpha\beta}{\gamma\delta\varepsilon - \beta\delta^2 - \alpha\varepsilon^2}$$

als denjenigen Quotienten bekommt, welcher bei jeder beliebigen, die Darstellbarkeit unter der Form (I) besitzenden Function zweiten Grades

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

den Werth $= 1$ hat, bei jeder beliebigen dagegen dieser Darstellbarkeit ermangelden Function

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

allen Coefficienten vorher als Factor zugefügt werden muss, um der Function die Darstellbarkeit (I) zu geben. Substituiren wir also in zwei der zur Aufgabe IV. erhaltenen Antwortsgleichungen, z. B. in den Gleichungen (6), statt $ABDE\ A'B'D'E'$ respective

$$\alpha N,\ \beta N,\ \delta N,\ \varepsilon N,\quad \alpha' N',\ \beta' N',\ \delta' N',\ \varepsilon' N',$$

d. h.

$$\frac{\alpha(\gamma^2 - 4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon - \beta\delta^2 - \alpha\varepsilon^2},\ \frac{\beta(\gamma^2 - 4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon - \beta\delta^2 - \alpha\varepsilon^2} \text{ u. s. w.} \ldots \frac{\alpha'(\gamma'^2 - 4\alpha'\beta')}{\gamma'\delta'\varepsilon' - \beta'\delta'^2 - \alpha'\varepsilon'^2} \text{ u. s. w.} \ldots$$

so sind die nach gehöriger Entwickelung sich ergebenden Gleichungen:

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{\alpha\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\dfrac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{\alpha'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}\\[2ex] \dfrac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{\beta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\dfrac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{\beta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}\end{cases}$$

diejenigen, welche die gesuchte Antwort zur Aufgabe III. ausmachen, d. h. welche genügen, um jedem Systeme zweier beliebigen Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0,$$

man möge nun ihre sechs und sechs Coefficienten mit jedem beliebigen Factor multipliciren, jedesmal auf's neue die Eigenschaft des Besitzes einer gemeinschaftlichen Asymptote zu verschaffen. Hätte die andere Antwortsform (4) der Aufgabe IV. die nämliche Verallgemeinerung erlitten, so hätten wir die Antwort der Aufgabe III. in folgender etwas weniger einfachen Gestalt bekommen:

$$\frac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{(\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2)\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\frac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{(\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2)\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}$$
$$\frac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{(\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2)\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\frac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{(\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2)\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}.$$

Welche aber der Antwortsformen (4) oder (6) oder (7) man auch gewählt hätte, immer würde es uns nicht erlaubt sein, die durch Verallgemeinerung sich ergebenden Gleichungen ohne Aenderung der Bedeutung beide zugleich rational zu machen, aus der nämlichen Ursache, wesshalb die Gleichungen (4) oder (6) oder (7) selbst nicht beide zugleich rational gemacht werden dürfen. Wollen wir daher die Antwort zur Aufgabe III. in rationaler Form bekommen, so müssen wir in irgend einem der Gleichungen-Paare (8) die Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w.... durch die allgemeineren

$$\frac{\alpha(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2},\quad \frac{\alpha'(\gamma'^2-4\alpha'\beta')}{\gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2},\quad \frac{\beta(\gamma^2-4\alpha\beta)}{\gamma\delta\varepsilon-\beta\delta^2-\alpha\varepsilon^2},\quad \text{u. s. w.}$$

ersetzen, woraus sich ein System zweier verwickelter Formeln ergibt, deren Entwickelung hier füglich unterwegs bleiben darf.

Wir wollen jetzt nochmals die gefragte Antwort auf die Aufgabe III. zu bekommen suchen, diesmal aber mittelst einer anderen Coefficienten-Wahl, d. h. mittelst der Lösung einer anderen intermediären Aufgabe IV. Es sollen nämlich die zwölf Coefficienten

$$ABCDEF\ A'B'C'D'E'F'$$

jetzt nicht den Bedingungen (3), sondern den Bedingungen $A=1$ $A'=1$ unterworfen sein und sich daher auf zehn reduciren. Neh-

men wir jetzt die erstere unserer beiden Gleichungen, so können wir immer identisch setzen

$$x^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F\equiv(x+py+q)(x+my+n)+r,$$

und zwar ohne dass wir die Coefficienten $BCDEF$ irgend einer neuen Bedingung zu unterwerfen brauchen; welches letzte dagegen der Fall gewesen sein würde, wenn wir unsere Gleichung der Darstellbarkeit unter der Form (1) unterworfen hätten. Durch Entwickelung ergibt sich, dass die vier Coefficienten $BCDE$ in den vier Grössen $p\ q\ m\ n$ durch die Gleichungen

$$B=pm\quad C=p+m\quad D=q+n\quad E=pn+qm$$

und daher umgekehrt die Grössen $p\ q\ m\ n$ in den Coefficienten durch die Gleichungen

$$p=\tfrac{1}{2}(C\pm\sqrt{C^2-4B})\qquad q=\tfrac{1}{2}D\pm\frac{CD-2E}{2\sqrt{C^2-4B}}$$

$$m=\tfrac{1}{2}(C\mp\sqrt{C^2-4B})\qquad n=\tfrac{1}{2}D\mp\frac{CD-2E}{2\sqrt{C^2-4B}}$$

ausgedrückt werden. Setzen wir ebenso

$$x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'\equiv(x+p'y+q')(x+m'y+n')+r',$$

so ergibt sich, als die zum gemeinschaftlichen Besitze einer Asymptote nothwendige Bedingung, das Stattfinden des einen oder des anderen der vier folgenden Gleichungen-Paare

$$\begin{array}{cccc} p=p' & p=m' & m=p' & m=m' \\ q=q' & q=n' & n=q' & n=n' \end{array}$$

d. h. das Stattfinden der beiden Gleichungen

$$C\pm\sqrt{C^2-4B}=C'\pm\sqrt{C'^2-4B'}$$

$$\frac{D\sqrt{C^2-4B}\pm(CD-2E)}{\sqrt{C^2-4B}}=\frac{D'\sqrt{C'^2-4B'}\pm(C'D'-2E')}{\sqrt{C'^2-4B'}}$$

bei irgend einer von vier gewissen aus den sechszehn möglichen Combinationen der in ihnen vorkommenden Doppelzeichen $\pm$. Ersetzen wir nun in diesen Antwortsgleichungen unserer jetzigen Aufgabe IV. die Coefficienten $BB'CC'$ u. s. w. respective durch $\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{\beta'}{\alpha'}\ \frac{\gamma}{\alpha}\ \frac{\gamma'}{\alpha'}$ u. s. w., so bekommen wir die Antwort der Aufgabe III. unter folgender Form:

$$\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{\alpha}=\frac{\gamma'\pm\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{\alpha'},$$

$$\frac{\delta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\delta-2\alpha\varepsilon)}{\alpha\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\frac{\delta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\delta'-2\alpha'\varepsilon')}{\alpha'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}.$$

Hätten wir diejenige Coefficienten-Wahl genommen, wo nicht $A=1$ $A'=1$, sondern $B=1$ $B'=1$, so hätten wir durch eine ähnliche Argumentation die Antwort auf die Aufgabe III. unter der Form

$$\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{\beta}=\frac{\gamma'\pm\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{\beta'}$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}\pm(\gamma\varepsilon-2\beta\delta)}{\beta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}=\frac{\varepsilon'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}\pm(\gamma'\varepsilon'-2\beta'\delta')}{\beta'\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}$$

bekommen, wobei jedoch in beiden Fällen zu beachten ist, dass zwar eine beider Gleichungen, z. B. die erstere, rational gemacht und zur Form

$$(9)\qquad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\gamma-\beta\gamma')+(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2=0$$

gebracht werden darf, die gleichzeitige Rationalmachung aber der anderen nicht erlaubt ist.

Da jede unserer beiden letzten Coefficienten-Wahlen eine unsymmetrische war, d. h. eine andere in Bezug auf A, B, D, E, als in Bezug auf B, A, E, D, so bekommen wir in diesen beiden Fällen die Antwort der Aufgabe III. in unsymmetrischer Form. Und zwar bekommen wir jedesmal nur eine der beiden Gleichungen, welche die nach der vorigen Methode bekommene symmetrische Antwortsform der Aufgabe III. ausmachten. Die andere unserer jetzigen Gleichungen drückt, wenn wir die Cotangenten der zwischen der Coordinaten-Axe $y=0$ und den Asymptoten der Kegelschnitte begriffenen Winkel μ nennen, die Bedingung aus, dass sowohl

$$\mu=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

als auch (10)

$$\mu=\frac{\gamma'\pm\sqrt{\gamma'^2-4\alpha'\beta'}}{2\alpha'},$$

d. h. die Bedingung, dass eine der beiden Asymptoten des ersten Kegelschnitts eine des zweiten zwar nicht decke, aber doch ihr parallel laufe, d. h. die Bedingung, dass von den vier Durchschnittspunkten der Kegelschnitte einer unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt sei.

Eine andere Methode, die Aufgabe III. zu lösen, ist folgende: Stellen wir uns die gegebene Frage III. unter folgender etwas veränderten Form vor:

V. Aus allen den individuellen Kegelschnitts-Paaren, welche man bekommt, wenn man im Ausdrucke

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$
$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' xy + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' = 0$$

den Coefficienten α, β, u. s. w. . . . α', β', u. s. w. alle möglichen reellen Werthe zuertheilt, diejenigen auszusuchen, denen die Eigenschaft des gemeinschaftlichen Besitzes einer Asymptote zukommt?

Um nun zur vollständigen Antwort dieser Frage V. zu gelangen, d. h. zu einem Ausdruck, welcher alle die eine gemeinschaftliche Asymptote besitzenden Kegelschnitts-Paare enthält, wollen wir von einer particulären Lösung ausgehen, d. h. von einem nur einige dieser Kegelschnitts-Paare darstellenden Ausdruck, z. B. vom Ausdruck

$$(y)(gx + hy + 1) + k \equiv gxy + hy^2 + y + k = 0$$
$$(y)(g'x + h'y + 1) + k' \equiv g'xy + h'y^2 + y + k' = 0,$$

welcher, wenn man den Grössen g h k g' h' k' alle möglichen Werthe zuertheilt, alle möglichen Kegelschnitts-Paare ausdrückt, welche die Coordinaten-Axe $y = 0$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben und daher, ausser den geforderten zwei Bedingungen der Asymptoten-Coincidirung, auch noch den zwei anderen unterworfen sind, dass die gemeinschaftliche Asymptote senkrecht zur Axe $x=0$ laufe und dass sie den Coordinaten-Ursprung durchstreiche. Es enthält nun aber der erstere der Kegelschnitte unserer particulären Lösung nur drei Unbestimmte g h k, und ist daher, da ein allgemeiner Kegelschnitt deren fünf enthält, $5-3=2$ Bedingungen unterworfen, nämlich dass eine ihrer Asymptoten senkrecht zur Axe $x=0$ laufe und den Punkt $\begin{smallmatrix} x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}$ durchstreiche, d. h. es sind ihre durch Entwickelung sich ergebenden Coefficienten nicht die allgemeinen der Gleichungsform

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$

sondern zweien Bedingungen unterworfen, und zwar zweien von der Coefficienten-Wahl unabhängigen: erstens nämlich dass $\alpha = 0$, zweitens dass die Tangente des zwischen der Asymptote und der Axe $y=0$ begriffenen Winkels sowohl $= -\frac{\delta}{\varepsilon}$, als auch

$$= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta}$$

sei, d. h. dass man habe $\alpha\varepsilon^2 + \beta\delta^2 = \gamma\delta\varepsilon$, d. h. dass die Darstellbarkeit unter Form (1) im Allgemeinen unmöglich sei. Und auch

der zweite Kegelschnitt der particulären Lösung ist zweien ähnlichen Bedingungen

$$\alpha'=0 \text{ und } \gamma'\delta'\varepsilon'-\beta'\delta'^2-\alpha'\varepsilon'^2=0$$

unterworfen. Es war aber in der Frage V. nach einem Systeme zweier Kegelschnitte gefragt, deren jeder an sich ganz allgemein wäre, sodass nur das ganze System sich durch den Besitz einer gemeinschaftlichen Asymptote specialisirte. Soll daher unsere particuläre Lösung die vollständige Lösung der Frage V. werden, so müssen wir jedem beider Kegelschnitte, damit sie die allgemeine werde, zwei Unbestimmte zu ihren drei vorigen hinzufügen, d. h. wir müssen sie betrachten als einen speciellen Fall eines allgemeinen Kegelschnitts, welche aus dem primitiven durch eine in zweifacher Hinsicht unbestimmte Transformation entstanden sei. Wir würden aber auf diese Weise dem Systeme $2\times2=4$ Unbestimmte hinzufügen, sodass es $6+4=10$ d. h. die zum Ausdruck eines allgemeinen Systems zweier Kegelschnitte nothwendige Anzahl von 2×5 Unbestimmten bekäme und daher keineswegs die in der Frage V. gefragten speciellen Systeme von Kegelschnitten ausdrücken würde. Wir müssen daher nicht jeden Kegelschnitt an sich, sondern beide zugleich, mit Beibehaltung ihrer relativen Lage, verallgemeinern durch eine zwei Unbestimmte ϑ $\varkappa$ enthaltende Transformation, wodurch wir die Lösung der Frage V. d. h. den $6+2=8$ Unbestimmte enthaltenden Ausdruck eines den $10-8=2$ Bedingungen der Asymptoten-Coincidirung unterworfenen Systemes zweier Kegelschnitte bekommen. Und um hiervon zur Lösung der Frage III., d. h. um vom Ausdrucke selbst zum Zusammenhange seiner Coefficienten zu gelangen, stellen wir die zwölf Coefficienten unseres erhaltenen Ausdrucks respective den zwölf Coefficienten eines allgemeinen Systems zweier Kegelschnitte gleich; wobei jedoch zu beachten ist, dass die zwei Gruppen der sechs Coefficienten unserers Ausdrucks, weil sie jede mit einem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt werden dürfen, nicht die allgemeinen der Aufgabe III., sondern die bestimmten der Aufgabe IV. sind, und daher den zwölf Coefficienten

$$ABCDEF \quad A'B'C'D'E'F'$$

eines bei irgend einer bestimmten Coefficienten-Wahl stattfindenden Ausdrucks

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'=0$$

respective gleichgestellt werden müssen, aus welchem System von zwölf Gleichungen wir durch Elimination der acht Grössen ghk $g'h'k'$ $\vartheta\varkappa$ die verlangten vier Gleichungen zwischen den zwölf Coefficienten

$$ABCDEF \quad A'B'C'D'E'F',$$

d. h. die Lösung der jedesmaligen Frage IV. bekommen; woraus alsdann weiter, wie früher, die Antwort der Aufgabe III. abgeleitet werden muss.

Es ist aber wohl zu beachten, dass nicht jede beliebige, zwei Unbestimmte enthaltende, Transformation dazu geeignet ist, unsere particuläre Lösung der Frage V. in die vollständige abzuändern. Nehmen wir z. B. diejenige Transformation, wobei die älteren Coordinaten x und y respective durch neuere

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta + \lambda \qquad y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

ersetzt werden, so bekommen wir den Ausdruck

$$(h\sin^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h\cos^2\vartheta - g\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 2h\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + (g\lambda+1)(\sin\vartheta)x + (g\lambda+1)(\cos\vartheta)y + k = 0$$

$$(h'\sin^2\vartheta + g'\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h'\cos^2\vartheta - g'\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)] + 2h'\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + (g'\lambda+1)(\sin\vartheta)x + (g'\lambda+1)(\cos\vartheta)y + k' = 0$$

und wenn wir die so bekommenen zwölf Coefficienten respective den zwölf Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. gleichstellen, bekommen wir unmittelbar

$$\frac{D}{E} = -\operatorname{tg}\vartheta = \frac{D'}{E'} \text{ d. h. } DE' - D'E = 0$$

d. h einen Coefficientenzusammenhang, welchen wir durch keine der vorigen Methoden als der Eigenschaft der Asymptoten-Coincidirung zukommend gefunden haben; und doch, wenn er wirklich ihr zukäme, hätte er, da er ein von der Coefficienten-Wahl unabhängiger ist und daher durch $\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon = 0$ dargestellt werden kann, entweder eine der Gleichungen (11) oder doch eine Resultante dieser beiden Gleichungen sein sollen. Es ergibt sich dann auch bei näherer Betrachtung, dass wir nicht die vollständige, sondern eine neue particuläre Lösung der Frage V. bekommen haben, sodass unsere Gleichung $\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon = 0$ nur denjenigen Kegelschnitts-Paaren zukommt, welche, ausser den beiden Eigenschaften der Asymptoten-Coincidirung, noch durch eine dritte Eigenschaft specialisirt sind. Es ist nämlich unsere Transformation zu betrachten als eine Translation der primitiven Figur parallel der Axe $y=0$, d. h. als eine Ersetzung der x und y durch neue Coordinaten $\begin{matrix} x' = x + \lambda \\ y' = y \end{matrix}$, der eine Umdrehung um den Coordinaten-Ursprung, d. h. eine Ersetzung der x und y durch

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' &= x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{aligned}$$

nachgefolgt wäre. Es ändert nun aber die erstere dieser partiellen Transformationen die gegebene particuläre Lösung in

$$(y)\left(\frac{g}{g\lambda+1}x + \frac{h}{g\lambda+1}y + 1\right) + \frac{k}{g\lambda+1} = 0$$

$$(y)\left(\frac{g'}{g'\lambda+1}x+\frac{h'}{g'\lambda+1}y+1\right)+\frac{k'}{g'\lambda+1}=0$$

d. h. in

$$(y)(g''x+h''y+1)+k''=0$$
$$(y)(g'''x+h'''y+1)+k'''=0$$

und ist daher eigentlich nicht als Verallgemeinerung zu betrachten, sodass die ganze Doppel-Transformation als aus der einfachen Transformation

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

bestehend und daher nur eine einzige Unbestimmte ϑ der particulären Lösung zuführend zu betrachten ist, sodass diese particuläre Lösung von ihren vier Specialisirungsbedingungen nur die einzige, dass die gemeinschaftliche Asymptote senkrecht zur Axe $x=0$ laufe, verloren hat, die zwei Bedingungen dagegen der Asymptoten-Coincidirung und die dritte, dass die gemeinschaftliche Asymptote, d. h. die Vereinigungs-Gerade beider Kegelschnitts-Centra, den Coordinaten-Ursprung durchstreiche, noch behalten hat; und diese dritte Bedingung wird eben durch die erhaltene Gleichung $\delta\varepsilon'-\delta'\varepsilon=0$ ausgedrückt.

Wir müssen daher die Verallgemeinerung auf andere Weise einrichten, z. B. die Translation $\begin{matrix}x'=x+\lambda\\ y'=y\end{matrix}$ der Umdrehung

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

nicht vorausgehen, sondern folgen lassen, und daher die Transformation

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta+\lambda\cos\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\lambda\sin\vartheta$$

benutzen; oder, wenn wir statt der Translation $\begin{matrix}x'=x+\lambda\\ y'=y\end{matrix}$ die andere $\begin{matrix}x'=x\\ y'=y+\varkappa\end{matrix}$ nehmen, können wir diese der Drehung

$$x'=x\cos\vartheta-y\sin\vartheta$$
$$y'=x\sin\vartheta+y\cos\vartheta$$

entweder folgen oder vorangehen lassen. Nehmen wir letzteren Fall und ersetzen wir daher die Coordinaten x und y unserer particulären Lösung durch

$$x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$
$$y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \varkappa\,,$$

so bekommen wir den Ausdruck

$$(h\sin^2\vartheta + g\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h\cos^2\vartheta - g\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$
$$+ 2h\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + [(2h\varkappa + 1)\sin\vartheta + g\varkappa\cos\vartheta]\,x$$
$$+ [(2h\varkappa + 1)\cos\vartheta - g\varkappa\sin\vartheta]\,y + (h\varkappa^2 + \varkappa + k) = 0$$

$$(h'\sin^2\vartheta + g'\sin\vartheta\cos\vartheta)x^2 + (h'\cos^2\vartheta - g'\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + [g'(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$
$$+ 2h'\sin\vartheta\cos\vartheta]xy + \ldots\ldots + [(2h'\varkappa + 1)\sin\vartheta + g'\varkappa\cos\vartheta]x$$
$$+ [(2h'\varkappa + 1)\cos\vartheta - g'\varkappa\sin\vartheta]y + (h'\varkappa^2 + \varkappa + k') = 0.$$

Multipliciren wir jetzt Alles mit $\sin\vartheta$, setzen wir zur Abkürzung $\cot g\vartheta = \mu$ und identificiren wir unsere zwölf Coefficienten mit den Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w., so bekommen wir das System der zwölf Gleichungen

$$A = \frac{h + g\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad B = \frac{h\mu^2 - g\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad C = \frac{g\mu^2 + 2h\mu - g}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$A' = \frac{h' + g'\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad B' = \frac{h'\mu^2 - g'\mu}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad C' = \frac{g'\mu^2 + 2h'\mu - g'}{(\mu^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$D = \frac{(2h\varkappa+1) + (g\varkappa\mu)}{\mu^2+1} \quad E = \frac{(2h\varkappa+1)\mu - (g\varkappa)}{\mu^2+1} \quad F = \frac{h\varkappa^2 + \varkappa + k}{\sqrt{\mu^2+1}}$$

$$D' = \frac{(2h'\varkappa+1) + (g'\varkappa\mu)}{\mu^2+1} \quad E' = \frac{(2h'\varkappa+1)\mu - (g'\varkappa)}{\mu^2+1} \quad F' = \frac{h'\varkappa^2 + \varkappa + k'}{\sqrt{\mu^2+1}}.$$

Sondern wir aus den vier ersten Gleichungen die Grössen $gg'hh'$ ab, so bekommen wir

$$h = (A+B)\sqrt{\mu^2+1} \quad h' = (A'+B')\sqrt{\mu^2+1}$$

$$g = \frac{(A\mu^2 - B)\sqrt{\mu^2+1}}{\mu} \quad g' = \frac{(A'\mu^2 - B')\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}$$

und substituiren wir dieses in die Werthe der C und C', so ergibt sich

$$C = \frac{A\mu^2 + B}{\mu} \quad C' = \frac{A'\mu^2 + B'}{\mu}\,,$$

aus welchen Gleichungen sich die beiden Werthe (10) der Grösse μ und daher durch deren Gleichstellung die Gleichung (9) ergibt. Um die übrigen Gleichungen der gesuchten Antwort zu bekommen, nehmen wir aus den zwölf Gleichungen die Nr. (7), (8), (9), (10), und verbinden sie zu

$$\mu E + D = 2h\varkappa + 1 \quad \mu E' + D' = 2h'\varkappa + 1$$

woraus wir bekommen

$$\frac{\mu E + D - 1}{2(A+B)\sqrt{\mu^2+1}} = \varkappa = \frac{\mu E' + D' - 1}{2(A'+B')\sqrt{\mu^2+1}}$$

und wenn wir den hieraus sich ergebenden Werth des μ dessen beiden vorher erhaltenen Werthen (10) respective gleichstellen, bekommen wir zwei neue Antwortsgleichungen:

$$(12)\left\{\begin{aligned}\frac{(D'-1)(A+B)-(D-1)(A'+B')}{E(A'+B')-E'(A+B)} &= \frac{C \pm \sqrt{C^2-4AB}}{2A}\\ \frac{(D'-1)(A+B)-(D-1)(A'+B')}{E(A'+B')-E'(A+B)} &= \frac{C' \pm \sqrt{C'^2-4A'B'}}{2A'}.\end{aligned}\right.$$

Und durch eine etwas andere Einrichtung der Elimination könnten wir diesen drei Gleichungen leicht noch eine vierte hinzufügen und so die vollständige Lösung unserer jetzigen Aufgabe IV. bekommen. Von diesen Gleichungen ist die erste, d. h. die Gleichung (9), eine von der Coefficienten-Wahl unabhängige; die übrigen dagegen finden nur bei unserer jetzigen Coefficienten-Wahl statt. Und es ist diese eine von den vorher benützten verschiedene; denn der die Natur der Coefficienten-Wahl ausdrückende Zusammenhang zwischen den sechs Coefficienten einer Kegelschnittsgleichung ist hier nicht das sich zu fünf Reduciren der sechs Coefficienten oder die Darstellbarkeit der Gleichung unter der Form (1), sondern es ist ihre Entspringbarkeit aus der Form

$$(y)\,(gx + hy + 1) + k = 0$$

mittelst der Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' &= x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \varkappa, \end{aligned}$$

sodass der in der Antwort angegebene Zusammenhang nicht mehr — wie früher, da die Gleichungen (4) die Antwort darstellten, der Fall war — den Coefficienten der Gleichungen

$$(2x+3y+1)(4x+5y+1)-12 \equiv 8x^2 + 15y^2 + 22xy + 6x + 8y - 11 = 0$$

$$(2x+3y+1)(6x+7y+1) - 11 \equiv 12x^2 + 21y^2 + 32xy + 8x + 10y - 10 = 0$$

zukommt, dieser Zusammenhang (12) dagegen den Coefficienten der, durch Multiplicirung der vorigen Gleichungen mit $\frac{2}{13}$ sich ergebenden Gleichungen

$$\frac{16}{13}x^2 + \frac{30}{13}y^2 + \frac{44}{13}xy + \frac{12}{13}x + \frac{16}{13}y - \frac{22}{13} = 0$$

$$\frac{24}{13}x^2+\frac{42}{13}y^2+\frac{64}{13}xy+\frac{16}{13}x+\frac{20}{13}y-\frac{20}{13}=0$$

zukommt. Wollen wir nun weiter aus der erhaltenen Antwort zur jetzigen Aufgabe IV. die zur Aufgabe III. herleiten, so müssen wir in den Gleichungen (12) nebst zwei anderen bei der nämlichen Coefficienten-Wahl stattfindenden Gleichungen, die Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. respective durch αN, $\alpha'N'$, βN, $\beta'N'$, u. s. w. ersetzen, wobei N und N' respective die unbekannten Functionen der allgemeinen Coefficienten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'$ bedeuten, deren jede, wenn sie mit den sechs Coefficienten irgend einer beliebigen Kegelschnittsgleichung multiplicirt wird, diese zu den Coefficienten unserer jetzigen Wahl abändert; aus welchem Systeme von vier Gleichungen sich alsdann einerseits, durch Absonderung der N und N', der Werth dieser unbekannten Factoren, andererseits, durch Elimination der N und N', die Antwort der Aufgabe III., d. h. die gesuchten von der Coefficienten-Wahl unabhängigen zwei Gleichungen zwischen den Grössen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'$ finden liesse.

Bei dieser Methode der Lösung der Aufgabe IV., wo man sich einer gewissen particulären Lösung als Hülfsmittel zur Erlangung der vollständigen bedient, fängt man nicht, wie bei den vorigen Methoden, damit an, sich irgend zwei bestimmte Coefficienten-Gruppen auszuwählen; man lässt vielmehr die Coefficienten-Wahl unbestimmt, bis man die vollständige Lösung der Frage V., d. h. den Ausdruck der verallgemeinten Kegelschnitte bekommen hat. Und jetzt erst wählt man sich eine bestimmte Art der Coefficienten aus, je nachdem man die erhaltenen Gleichungen unverändert lässt oder aber sie mit einem oder anderen Factor multiplicirt. Hätten wir z. B. unsere Antwort zur Frage V., statt sie mit $\sin\vartheta$ zu multipliciren, ungeändert gelassen oder aber sie durch $\sin\vartheta$ oder $\sin^2\vartheta$ u. s. w. dividirt, so hätten wir statt (12) andere Gleichungen bekommen.

Wollen wir bei unserer jetzigen Methode die Coefficienten-Wahl nehmen der Bedingungen (3), d. h. der Darstellbarkeit unter Form (1), so müssen wir beachten, dass der zur Antwort auf die Frage V. erhaltene Ausdruck die Form hatte:

$$[x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\varkappa][(h\sin\vartheta+g\cos\vartheta)x+(h\cos\vartheta-g\sin\vartheta)y \\ +(h\varkappa+1)]+k=0$$

$$[x\sin\vartheta+y\cos\vartheta+\varkappa][(h'\sin\vartheta+g'\cos\vartheta)x+(h'\cos\vartheta-g'\sin\vartheta)y \\ +(h'\varkappa+1)]+k'=0$$

sodass, soll jeder Factor der in den ersten Termen der Gleichungen vorkommenden Producte die Einheit zum Coefficienten ihres mit x oder y nicht multiplicirten Terms haben, erstens beide Gleichungen durch $\varkappa$, zweitens die erstere durch $h\varkappa+1$, die zweite durch $h'\varkappa+1$ dividirt werden muss. Identificiren wir nach vollführter Division die erhaltenen zwölf Coefficienten respective

mit den Coefficienten $AA'BB'$ u. s. w. und setzen wir wiederum zur Abkürzung $\cot g\vartheta = \mu$, so bekommen wir die zwölf Gleichungen:

$$A = \frac{h+g\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)(\mu^2+1)} \quad A' = \frac{h'+g'\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)(\mu^2+1)}$$

$$B = \frac{h\mu^2-g\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)(\mu^2+1)} \quad B' = \frac{h'\mu^2-g'\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)(\mu^2+1)}$$

u. s. w., woraus wir bekommen:

$$h\varkappa+1 = \frac{h}{\varkappa(A+B)} \quad h'\varkappa+1 = \frac{h'}{\varkappa(A'+B')}$$

$$g = \frac{h}{\mu} \times \frac{A\mu^2-B}{A+B} \quad g' = \frac{h'}{\mu} \times \frac{A'\mu^2-B'}{A'+B'}$$

und wenn wir diese Werthe der vier Grössen g, g', $h\varkappa+1$, $h'\varkappa+1$ in die Werthe der D und D' substituiren, erhalten wir nach gehöriger Reduction

$$D = \frac{(h\varkappa+1)+h\varkappa+g\varkappa\mu}{\varkappa(h\varkappa+1)\sqrt{\mu^2+1}} = \frac{A\varkappa^2(\mu^2+1)+1}{\varkappa\sqrt{\mu^2+1}}$$

$$D' = \frac{(h'\varkappa+1)+h'\varkappa+g'\varkappa\mu}{\varkappa(h'\varkappa+1)\sqrt{\mu^2+1}} = \frac{A'\varkappa^2(\mu^2+1)+1}{\varkappa\sqrt{\mu^2+1}}$$

und wenn wir die hieraus sich ergebenden Werthe

$$\varkappa = \frac{D \pm \sqrt{D^2-4A}}{2A\sqrt{\mu^2+1}} \cdot \varkappa = \frac{D' \pm \sqrt{D'^2-4A'}}{2A'\sqrt{\mu^2+1}}$$

einander gleichstellen, bekommen wir die erstere der Gleichungen (6), während die zweite in ähnlicher Weise, nur mit einer kleinen Aenderung der Eliminationsweise, gefunden werden würde.

Nachdem wir nun die Aufgaben III. und IV., und daher auch die, beide enthaltende, Aufgabe I. gelöst haben, wollen wir einen anderen Fall betrachten, worin zwei Kegelschnitte auf solche Weise zusammenhangen, dass zwei ihrer vier Durchschnittspunkte sich unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernen. Wir wollen uns nämlich die Aufgabe stellen:

VI. Wie müssen, sollen die beiden reellen oder imaginären Asymptoten eines Kegelschnitts respective den beiden eines anderen parallel laufen, die Coefficienten beider Kegelschnittsgleichungen zusammenhangen?

So wie wir nun oben die Aufgabe I. in die allgemeinere III. und in die specielleren IV. getrennt haben, so könnten wir auch hier unsere Aufgabe VI. in eine allgemeinere und in verschiedene speciellere trennen. Wir wollen dieses jedoch unterlassen, da

wir sogleich die Antwort zur allgemeineren Aufgabe, d. h. den von der jedesmaligen Coefficienten-Wahl unabhängigen Coefficientenzusammenhang bekommen: Denn nennen wir wiederum μ die Cotangenten der zwischen Asymptote und Coordinaten-Axe $y=0$ begriffenen Winkel, so sind die Asymptoten-Richtungen der beiden Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0$$

respective durch die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\alpha\mu^2+\gamma\mu+\beta=0$$

und durch diejenigen der Gleichung

$$\alpha'\mu^2+\gamma'\mu+\beta'=0$$

gegeben. Soll daher den in der Aufgabe VI. gestellten Forderungen genügt werden, so müssen die beiden Wurzeln der ersteren Gleichung gleich denen der zweiten sein, d. h. es müssen die beiden Gleichungen selbst identisch sein; was nur entweder so möglich ist, dass die drei Coefficienten α, β, γ den drei Coefficienten α', β', γ' respective gleich sind, oder aber so, dass sie von ihnen nur durch einen gemeinschaftlichen Factor verschieden sind. Wir erhalten daher sogleich zur Antwort auf die Aufgabe VI.

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma} \text{ d. h. } \begin{matrix}\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0\\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=0\end{matrix}. \tag{13}$$

Wir wollen jetzt einen dritten Fall betrachten, worin den Forderungen der primitiven Aufgabe genügt wird: Stellen wir uns also die Aufgabe:

VII. Wie müssen die Coefficienten zweier Kegelschnittsgleichungen beschaffen sein, damit einer beider Kegelschnitte sich zu einer Geraden reducire, und daher von den vier in endlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung liegenden reellen oder imaginären Durchschnittspunkten der zwei Kegelschnitte nur zwei übrig bleiben, nämlich diejenigen der Geraden mit dem sich nicht zu einer Geraden reducirenden Kegelschnitt?

Wir bekommen sogleich zur Antwort, dass das System der zwei Kegelschnitte

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'=0$$

obigen Forderungen genügt, wenn entweder die drei Gleichungen $A=0$ $B=0$ $C=0$ zugleich stattfinden, oder aber die drei anderen $A'=0$ $B'=0$ $C'=0$. Und es ist diese Antwortsform einigermassen von der Coefficienten-Wahl unabhängig, da sie die Antwort

nicht nur bei derjenigen Coefficienten-Wahl darstellt, wo die Coefficienten F und F' respective als Einheiten angenommen werden und die zwölf Coefficienten sich daher auf zehn reduciren, sondern auch bei derjenigen, wo $E=1$ $E'=1$ gesetzt wird, so wie auch bei der dritten, wo $D=1$ $D'=1$. Bei den drei anderen Coefficienten-Wahlen dagegen

$$A=1 \quad B=1 \quad C=1$$
$$A'=1 \quad B'=1 \quad C'=1$$

muss die erhaltene Antwortsform durch diese ersetzt werden, dass die zur Aufgabe VII. erforderliche Coefficienten-Beschaffenheit entweder aus dem Zusammenbestehen der drei Gleichungen $D=\infty$ $E=\infty$ $F=\infty$, oder aber aus dem der drei Gleichungen $D'=\infty$ $E'=\infty$ $F'=\infty$ besteht. Bei allen Coefficienten-Wahlen endlich, wo die zwölf Coefficienten, ohne dass sie sich auf zehn reducirten, irgend zweien Bedingungen, z. B. den Bedingungen (3) unterworfen werden, kann man entweder die eine oder die andere Antwortsform nehmen. Eine dagegen von der Coefficienten-Wahl ganz unabhängige Antwortsform zur Aufgabe VII. wäre das Zusammenbestehen entweder der drei Bedingungen

$$\frac{\alpha}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \quad \frac{\beta}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \quad \frac{\gamma}{\delta\varepsilon\zeta}=0 \qquad (14)$$

oder der drei anderen

$$\frac{\alpha'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0 \quad \frac{\beta'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0 \quad \frac{\gamma'}{\delta'\varepsilon'\zeta'}=0. \qquad (15)$$

Es ist jetzt zu untersuchen, ob ausser diesen drei Fällen der Aufgaben I., VI., VII. noch andere möglich sind, in welchen den Forderungen der primitiven Aufgabe:

VIII. Wann werden zwei Kegelschnitte scheinbar nur zwei reelle oder imaginäre Durchschnittspunkte besitzen, weil die zwei anderen unendlich weit gerückt sind?

genügt wird. Dass keine solchen Fälle mehr vorhanden sind, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Es waren in der Form VIII. der primitiven Frage beide Kegelschnitte als unbestimmt und veränderlich angenommen; da es jedoch hier nur auf den Zusammenhang zwischen den Kegelschnitten ankommt, so können wir auch einen beider Kegelschnitte als constant und bestimmt ansehen und uns die Frage unter folgender Form vorlegen:

IX. Es sei ein gewisser bestimmter Kegelschnitt

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

mit bestimmten und constant bleibenden Coefficienten und daher auch mit bestimmten und unveränderlichen Asymptoten kn und lm. Es sei überdiess ein zweiter, den er-

steren in den vier Punkten p q r s durchschneidender Kegelschnitt

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0,$$

dessen Coefficienten man jeden beliebigen Werth zuerkennen darf, sodass dessen Form und Asymptoten tw und uv veränderlich seien: Wie müssen alsdann die Coefficienten $A'B'C'D'E'F'$ sich ändern, damit zwei der vier Durchschnittspunkte p q r s unendlich weit rücken?

Es kann nun den Forderungen IX. nur auf diese Weise genügt werden, dass die beiden unendlich weit rückenden Punkte sich nach den Spitzen der Asymptoten kn und lm begeben. Denn es hat der unveränderliche Kegelschnitt keine anderen unendlich entfernten Punkte als eben diese Spitzen; und doch sollen die beiden unendlich weit rückenden Punkte stets Durchschnittspunkte bleiben, d. h. sich nicht vom unveränderlichen Kegelschnitt entfernen. Es ist also die Bedingung der Frage IX. nur auf folgende Weisen möglich: Entweder so, dass die Punkte p und q sich beide zur Spitze der Asymptote kn, oder aber so, dass sie sich beide zur Spitze der lm begeben, oder überhaupt so, dass das Punktenpaar pr oder das Paar ps oder qr oder qs oder rs sich zur Spitze der kn oder sich zur Spitze der lm begebe. Ueberdiess wird die genannte Bedingung noch erfüllt, wenn der Punkt p sich zur Spitze der kn, und zugleich der Punkt q sich zur Spitze der lm, oder aber wenn umgekehrt p sich nach lm und q sich nach kn begiebt, oder wenn überhaupt von den 6 Punkten-Paaren pq, pr, ps, qr, qs, rs der eine Punkt sich zur Spitze der kn, der andere sich zu der der lm begiebt. Es vereinigen sich nun alle erstgenannten Fälle zu der Bedingung, dass zwei der vier Durchschnittspunkte sich beide nach der Spitze einer der beiden Asymptoten des constant bleibenden Kegelschnitts begeben, alle letztgenannten Fälle zu der Bedingung, dass einer der vier Durchschnittspunkte sich zu der Spitze einer dieser Asymptoten und zugleich ein anderer der vier sich zur Spitze der anderen Asymptote begiebt. Es sind nun diese beiden Bedingungen im Allgemeinen respective diejenigen der Aufgaben I. und VI. Denn es wird die zweite unserer Bedingungen im Allgemeinen auf diese Weise erfüllt, dass der veränderliche Kegelschnitt so lange sich umdrehe und seine Form ändere, bis seine Asymptoten-Richtungen respective diejenigen der beiden Asymptoten kn und lm geworden sind; während die erstere Bedingung im Allgemeinen auf diese Weise erfüllt wird, dass der veränderliche Kegelschnitt, ohne gerade seine Form abzuändern zu brauchen, so lange seinen Ort wechsele, bis eine seiner Asymptoten eine der Asymptoten kn oder lm decke. Es können aber beide Bedingungen auch noch auf andere Weise erfüllt werden, wenn nämlich die vier Asymptoten kn, lm, tw, uv vier verschiedene Geraden darstellen, ein gewisser Theil aber des veränderlichen Kegelschnitts sich zu einer fünften, von allen vorigen verschiedenen, Geraden ausdehnt; in welchem Fall die beiden unendlich weit rückenden Punkte sich zwar immer noch auf dem veränderlichen Kegelschnitt,

nicht aber auf dieser fünften Geraden befinden, weil sie sonst nicht in den Spitzen der kn und lm würden liegen können; und es findet in diesem Falle die Bedingung (15) statt.

Die in der Frage IX. gesuchte Aenderung des Kegelschnitts

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

ist also nur auf diese Weise möglich, dass entweder die Bedingungen (11) oder (13) oder (15) erfüllt werden. Soll es aber erlaubt sein, die primitive Aufgabe VIII. unter der Form IX. sich vorzulegen, so muss man der Aufgabe IX. noch die Supplement-Aufgabe hinzufügen:

X. Es sei ein veränderlicher Kegelschnitt

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

mit veränderlichen Asymptoten kn und lm, und ein constanter Kegelschnitt

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F' = 0$$

mit den constanten Asymptoten tw und uv. Welche Aenderung der $ABCDEF$ giebt dem Systeme die in der Frage VIII. gesuchte Eigenschaft?

Und es besteht alsdann die Antwort auf die Frage VIII. aus den respectiven Antworten der IX. und X. zusammen. Die verschiedenen Fälle nun, in welchen der Aufgabe X. genügt wird, vereinigen sich ebenfalls zu drei Gruppen; deren beide ersteren resp. diejenigen sind der Aufgaben VI. und I., d. h. der Bedingungen (13) und (11), und daher den Aufgaben IX. und X. gemeinschaftlich sind; während die dritte Gruppe diejenigen Fälle umfasst, in welchen der in der Aufgabe X. veränderliche Kegelschnitt sich unendlich vergrössert, d. h. wenn die Bedingungen (14) stattfinden.

Da also ausser den Fällen der drei Aufgaben I., VI., VII. keine anderen vorhanden sind, in welchen der Aufgabe VIII. genügt wird, so bekommen wir sogleich als den gesuchten zur Aufgabe VIII. erforderlichen Coefficienten-Zusammenhang, dass es derjenige ist, bei welchem irgend eines der vier Gleichungs-Systeme

(11) (13) (14) (15)

stattfindet. Es setzt diess jedoch voraus, dass keine der drei Aufgaben I., VI., VII. eine Specialisirung einer der beiden anderen sei, da man alsdann sich mit den Antworten zu denjenigen beiden Aufgaben begnügen könnte, welche die dritte als speciellen Fall in sich enthielten. Und wirklich würde man oberflächlich meinen, es sei die Aufgabe VII. ein specieller Fall der I., denn es werde der Aufgabe I. in den beiden Fällen der VII. genügt,

weil die Antwortsgleichung (9) der Aufgabe I. sowohl durch die Bedingungen (14) als auch durch (15) zu $0=0$ reducirt wird. Es ist aber zu beachten, dass der Gleichung (9), soll sie die vollständige sein, noch ein Factor $\frac{1}{\alpha\alpha'}$ oder $\frac{1}{\beta\beta'}$ zukommen muss, weil sie vor ihrer Rationalmachung das Einandergleichsein der beiden Werthe (10) des μ bedeutete. Es wird nun der erstere dieser beiden Werthe

$$\mu=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

durch die Annahme $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ zur Form $\frac{0}{0}$ reducirt, und ist — im Fall man die Gerade nur als Gerade betrachtet, d. h. im Fall man die Coefficienten α, β, γ nicht näher bestimmt, als dass sie $=0$ sein sollen — gänzlich unbestimmt; wenn man dagegen die Gerade als unendlich grossen Kegelschnitt betrachtet, so drückt unsere Formel die beiden Asymptoten-Richtungen aus, welche dem Kegelschnitt vor seiner Vergrösserung zukamen und auch noch nach vollführter Vergrösserung zukommen. (Nicht zu verwechseln mit der Richtung der Geraden selbst, welche, da jede Gerade als ihre eigene Asymptote betrachtet werden kann, in gewisser Hinsicht eine dritte Asymptote der Figur ist). Jedenfalls aber ist kein Grund vorhanden, weshalb durch die Bedingungen (14), der erstere dieser beiden Werthe (10) des μ dem anderen, nur von α', β', γ' abhangenden und daher von den Bedingungen (14) keinen Einfluss empfindenden Werth desselben gleich werden sollte; woraus sich ergibt, dass die Aufgabe VII. keine Specialisirung der I. ist. Andererseits aber sollte man meinen, es sei die Aufgabe I., d. h. dass zwei Kegelschnitte einander in unendlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung berühren sollen, ein specieller Fall der Aufgabe VII., wo die Kegelschnitte einander zweimal in unendlicher Entfernung durchschneiden sollen, ebenso wie überhaupt das Sich-Berühren zweier Kegelschnitte ein specieller Fall ist des allgemeineren, wo sie sich durchschneiden. Denken wir uns jedoch, dass in der Aufgabe VIII., z. B. in der Aufgabe IX., schon einer der vier Durchschnitspunkte, z. B. der Punkt p, unendlich weit gerückt wäre, und zwar nach der Spitze der Asymptote kn, sodass nur noch der Punkt q unendlich weit rücken sollte: es hat alsdann dieser Punkt q, um in's Unendliche zu gelangen, die Wahl zwischen zwei Wegen, demjenigen der Asymptote kn und demjenigen der lm: im ersteren Fall wird der Aufgabe I. genügt, im letzteren Fall der Aufgabe VI.: es hat nun eben so viele Wahrscheinlichkeit für sich, dass der Punkt q die erstere, als dass er die zweite Bahn wählen wird; und es ist keineswegs die eine Wahl, d. h. die eine Aufgabe, ein specieller Fall der anderen. Weit entfernt also, dass die Aufgabe I. ein specieller Fall der VI. wäre, wird im Gegentheil, sobald der Aufgabe I. genügt wird, der VI. im Allgemeinen nicht genügt: denn es sei z. B. die Bedingung I. auf diese Weise erfüllt, dass die Asymptoten kn und tw einander decken, so ist die relative Lage der lm und ur zu einander unbestimmt gelassen, und es sind daher die lm und ur einander

im Allgemeinen nicht parallel; während dagegen die Frage VI. forderte, dass nicht nur die *kn* der *tw*, sondern auch die *lm* der *uv* parallel wäre.

Da also die primitive Aufgabe VIII. aus den drei Aufgaben I., VI., VII. zusammengesetzt ist, so ist die Antwort zur Aufgabe VIII. auf zweierlei Weise zu bekommen: entweder unmittelbar, ohne dass wir die VIII. in die drei partiellen Aufgaben trennen; oder aber so, dass wir die zu den drei partiellen Aufgaben I., VI., VII. erhaltenen vier Antworten (11), (13), (14), (15) zusammenfügen. Die letztere Weise wäre sehr leicht, wenn jede dieser vier Antworten nur aus einer einzigen Gleichung bestände, da man alsdann die vier Gleichungen nur mit einander zu multipliciren brauchte, um die verlangte Antwortsgleichung zur primitiven Aufgabe zu bekommen. Die gegenseitige Multiplication jedoch der zwei Gleichungen der Antwort (11) mit den beiden der Antwort (13) würde uns Mehreres als die Summe der Antworten (11) und (13) liefern; wozu noch kommt, dass jede der Antworten (14) und (15) aus einem System dreier Gleichungen besteht, sodass es durch unmittelbare Multiplication unmöglich ist, ein den Complex der vier Gleichungs-Systeme (11), (13), (14), (15) ausdrückendes Gleichungs-System zu finden. Wir wollen uns daher lieber der anderen Auflösungsweise der Aufgabe VIII. bedienen und auf folgende Weise argumentiren:

Wir wollen diejenige Coefficienten-Wahl nehmen, wo $C=1$, $C'=1$, und daher anfangen mit der Auflösung einer speciellen Aufgabe, die zur VIII. steht, wie die IV. zur III. Dass nun zwei der vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte

$$Ax^2+By^2+xy+Dx+Ey+F=0,$$

$$A'x^2+B'y^2+xy+D'x+E'y+F'=0$$

unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt seien, erheischt im Allgemeinen, dass zwei der vier Ordinaten der Durchschnittspunkte unendlich grosse Werthe besitzen, d. h. dass die durch Elimination von x aus den gegebenen beiden Gleichungen sich ergebende Gleichung vierten Grades $f_4(y)=0$ zwei unendlich grosse Wurzeln besitze und sich daher auf eine Gleichung zweiten Grades $F_2(y)=0$ reducire. Es ist nun die genannte Gleichung $f_4(y)=0$ folgende:

$$\frac{-(y+D)\pm\sqrt{(y+D)^2-4A(By^2+Ey+F)}}{2A}$$

$$=x=\frac{-(y+D')\pm\sqrt{(y+D')^2-4A'(B'y^2+E'y+F')}}{2A'},$$

d. h. das $=0$ Sein eines Productes von vier Functionen, deren drei letzteren von der ersten

$$(A-A')y+|(AD'-A'D)$$
$$+A'\sqrt{(y+D)^2-4A(By^2+Ey+F)}-A\sqrt{(y+D')^2-4A'(B'y^2+E'y+F')}$$

nur durch die Zeichen der beiden Radicale verschieden sind. Entwickeln wir, so bekommen wir nach gehöriger Reduction, dass die Function

$$\begin{aligned}&[A'-A-2(A'B-AB')]\,y^2+\ldots\ldots\\ &\quad\ldots+[2A'D-A(D+D')-2A(A'E-AE')]y+\ldots\\ &\quad\ldots+[D(A'D-AD')-2A(A'F-AF')]\end{aligned}$$

in's Quadrat erhoben, gleich sei dem Producte

$$\begin{aligned}&[(A'-A)^2y^2+2(A'-A)(A'D-AD')y+(A'D-AD')^2]\times\ldots\ldots\\ &\quad\ldots\times[(1-4AB)y^2+(2D-4AE)y+(D^2-4AF)].\end{aligned}$$

Es hat also unsere Gleichung $f_4(y)=0$, wenn wir zur Abkürzung die mit y^2, mit y^1 und mit y^0 multiplicirten Termen respective durch die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, k andeuten, die Form

$$(a+b+c)^2=(d+e+f)(g+h+k)$$

und wird daher durch Entwickelung die Form annehmen

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=dg+dh+dk+eg+eh+ek+fg+fh+fk.$$

Es drückt nun die Gleichung $a^2=dg$ die Bedingung aus, dass die Coefficienten der mit y^4 multiplicirten Termen einander aufheben, d. h. dass die Gleichung $f_4(y)=0$ sich zu einer $\underset{3}{F}(y)=0$ reducire, d. h. dass eine der vier Durchschnittpunkts-Ordinaten unendlich gross sei. In ähnlicher Weise drückt das System der beiden Gleichungen,

$$a^2=dg, \qquad 2ab=dh+eg$$

die Bedingung aus, dass unsere Gleichung $f_4(y)=0$ eine $\underset{2}{F}(y)=0$ werde, d. h. dass zwei der vier Durchschnitts-Ordinaten unendlich gross seien, d. h. den gesuchten bei unserer jetzigen Aufgabe erforderlichen Coefficienten-Zusammenhang. Es ist nun die Gleichung $a^2=dg$ die folgende:

$$[A'-A-2A(A'B-AB')]^2=(A'-A)^2\times(1-4AB),$$

d. h. nach Entwickelung:

$$(A'-A)(B'-B)+(A'B-AB')^2=0.$$

Die Gleichung

$$2ab = dh + eg$$

dagegen liefert uns nach Entwickelung das $=0$ Sein eine Summe von 34 Termen, deren sie jedoch 13 verliert, weil durch die Identität

$$2(A'-A)[2A'D-A(D+D')]$$
$$=[(A'-A)^2 \times 2D]+[2(A'-A)(A'D-AD')]$$

sechs Termen des ersten Gliedes durch sieben des anderen Gliedes aufgehoben werden. Die einundzwanzig übrigen Termen liefern nach gehöriger Reduction die Gleichung

$$(A'-A)(E'-E)+(A'-A)(B'D-BD')+(B'-B)(A'D-AD')$$
$$+2(A'B-AB')(A'E-AE')=0.$$

Um nun von diesen bei unserer jetzigen Coefficienten-Wahl stattfindenden Gleichungen zur Antwort der allgemeineren Aufgabe VIII. zu gelangen, wo von keiner bestimmten Coefficienten-Wahl die Rede ist, müssen wir statt $AA'BB'$ etc. respective

$$\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta'}{\gamma'} \quad \text{etc. .....}$$

substituiren, wodurch wir als die gesuchte Antwort auf die Aufgabe VIII. das System der zwei Gleichungen

$$(9) \qquad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\gamma-\beta\gamma')+(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2=0,$$

$$(16) \quad (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)+(\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\delta-\beta\delta')+(\beta'\gamma-\beta\gamma')(\alpha'\delta-\alpha\delta')$$
$$+2(\alpha'\beta-\alpha\beta')(\alpha'\varepsilon-\alpha\varepsilon')=0$$

bekommen, deren erstere wir schon früher als eine der Antwortsgleichungen der Aufgabe I. bekommen haben.

Es ist aber das System dieser beiden Gleichuugen noch keineswegs die vollständige Lösung der Aufgabe VIII., sondern nur eine particuläre, d. h. ein nur denjenigen Kegelschnitts-Paaren zukommender Coefficienten-Zusammenhang, welche, ausser der gefragten Eigenschaft, dass zwei ihrer vier Durchschnittspunkte sich unendlich entfernen sollen, noch gewisse andere Eigenschaften besitzen. Es war nämlich die erhaltene Antwort eigentlich diejenige der folgenden von der VIII. verschiedenen Aufgabe:

XI. Welcher Coefficienten-Zusammenhang wird erfordert, damit zwei der vier Durchschnittpunkts-Ordinaten zweier Kegelschnitte unendlich gross seien?

Von den der Aufgabe I. genügenden Kegelschnitts-Paaren genügen nun der Aufgabe XI. keineswegs diejenigen, welche die Axe $y=0$ oder eine ihr parallele und endlich von ihr entfernte

Gerade $y=b$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, sondern nur diejenigen, deren gemeinschaftliche Asymptote entweder der Axe $y=0$ nicht parallel ist, oder, wie die Parabel $y^2=px$, ihr parallel ist, sondern unendlich von ihr entfernt. So auch sind unter den der Aufgabe VI. genügenden Kegelschnitts-Paaren einige, welche der Aufgabe XI. nicht genügen. Will man daher alle die der Aufgabe VIII. genügenden Kegelschnitts-Paare bekommen, so muss man der Frage XI. noch folgende Supplement-Frage hinzufügen:

XII. Bei welchem Coefficienten-Zusammenhang werden zwei der vier Durchschnitts-Abscissen unendlich gross?

Zur Beantwortung der Aufgabe XII. brauchen wir bloss in der zur Beantwortung der XI. stattgefundenen Argumentation die Coefficienten A, B, D, E, A', B', D', E' überall respective durch B, A, E, D, B', A', E', D' zu ersetzen, welcher Umtausch die Gleichung (9) unverändert lässt, die (16) aber in folgende

$$(17)\qquad (\beta'\gamma-\beta\gamma')(\gamma\delta'-\gamma'\delta)+(\beta'\gamma-\beta\gamma')(\alpha'\varepsilon-\alpha\varepsilon')+(\alpha'\gamma-\alpha\gamma')(\beta'\varepsilon-\beta\varepsilon') \\ +2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta'\delta-\beta\delta')=0$$

abändert. Und es wird nun die Antwort der Aufgabe VIII. durch die Zusammenfügung der Antworten der XI. und der XII. ausgedrückt, d. h. durch ein System zweier Gleichungen, deren erstere die (9), die zweite aber das Product der (16) und (17) ist.

Bei dieser Methode, wo wir die primitive Aufgabe VIII. nicht in die drei partiellen I., VI., VII. getrennt haben, hat dennoch eine neue Trennung der VIII. in die XI. und XII. stattgefunden. Hätten wir gar keine Trennung der VIII. vornehmen wollen, so hätten wir auf folgende Weise argumentiren müssen: Es war in der Aufgabe VIII. gefragt, dass zwei der vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0$$

die Eigenschaft besässen, dass ihre Entfernung $r=\sqrt{x^2+y^2}$ vom Coordinaten-Ursprung den Werth ∞ hätte, d. h. dass sie sich irgendwo auf dem unendlichen grossen Kreise $x^2+y^2=\infty$ befänden. Wir können uns also unsere Frage in folgender Form vorlegen.

XIII. Welcher Coefficienten-Zusammenhang wird gefordert, damit die drei Curven

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0,$$
$$\alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' xy+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta'=0,$$
$$x^2+y^2=\infty$$

einander in zwei Punkten gemeinschaftlich durchschneiden?

Zur Beantwortung dieser Frage bringen wir die drei Curven auf die Form

$$r^2(\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi+\gamma\sin\varphi\cos\varphi)+r(\delta\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)+\zeta=0,$$

$$r^2(\alpha'\cos^2\varphi+\beta'\sin^2\varphi+\gamma'\sin\varphi\cos\varphi)+r(\delta'\cos\varphi+\varepsilon'\sin\varphi)+\zeta'=0,$$

$$r=\infty,$$

eliminiren aus den beiden ersteren die Coordinate φ, und suchen alsdann die Bedingung, dass die resultirende Gleichung $f_4(r)=0$ eine $F_2(r)=0$ werde; d. h. sich vom vierten Grad auf den zweiten Grad reducire. Bei der vorigen Methode hatten wir uns das Unendliche als ein unendlich grosses Quadrat vorgestellt, welches, da es zwei Paare gegenüberstehende Seiten hatte, eine Trennung der primitiven Aufgabe in zwei andere verursachte, während bei gegenwärtiger Methode, wo das Unendliche als ein unendlich grosser, keine gegenüberstehenden Seiten habender Kreis, gedacht wird, keine solche Trennung nöthig ist.

Anmerkung.

Wenn auch obige Abhandlung im Ausdruck noch einige undeutsche Wendungen enthält, die man einem Ausländer gewiss gern verzeihen wird, so ist die Sprache doch im Ganzen so deutlich nnd leicht verständlich, dass ich mir, ohne den Eindruck der ganzen Darstellung zu verwischen, wesentliche Aenderungen vorzunehmen nicht erlauben zu müssen glaubte und auch nicht erlauben durfte. Ich danke vielmehr dem geehrten Herrn Vf., dass er die Abhandlung in deutscher Sprache verfasst hat. G.

XXX.

Ueber einige geometrische Sätze und die Rechnung mit den imaginären Grössen.

Von dem

Herrn Doctor Zech

zu Stuttgart.

I.

Aufgabe. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letzteren Kreises schneidet.

Auflösung. Die beiden gegebenen Punkte seien A und B (Taf. VIII. Fig. 6.), der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei C; man ziehe die Gerade AC und senkrecht darauf den Halbmesser CD, beschreibe sofort aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis und schneide in diesem die Sehne $AE = AD$ ab; endlich fälle man von E eine Senkrechte auf AC, welche gehörig verlängert die auf AB im Halbirungspunkte errichtete Senkrechte im Punkte F schneide: dann ist der aus F mit dem Halbmesser FA beschriebene Kreis der gesuchte.

Beweis. Der gefundene Kreis geht durch A und, weil sein Mittelpunkt auf der auf AB im Halbirungspunkte errichteten Senkrechten liegt, auch durch B. Es ist also nur noch zu beweisen, dass derselbe den gegebenen Kreis auf die verlangte Weise schneidet. Letzteres ist, wie man leicht sieht, dann und nur dann der Fall, wenn der Halbmesser des gefundenen Kreises gleich ist der

Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Halbmesser des gegebenen Kreises und dessen andere Kathete die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist; d. h. wenn

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FC}^2.$$

Nun ist aber, wenn man den Durchschnittspunkt der Geraden EF und AC durch G bezeichnet, nach der Construction

$$2AC \times AG = \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2,$$

also

$$AC \times (2AG - AC) = \overline{CD}^2$$

oder weil

$$AC = AG + GC:$$

und

$$2AG - AC = AG - (AC - AG) = AG - GC:$$

$$\overline{AG}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{CD}^2, \quad \overline{AG}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{GC}^2.$$

Ferner ist in dem bei G rechtwinkligen Dreieck FGA

$$\overline{FA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GF}^2,$$

also nach der letzten Gleichung

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GF}^2,$$

oder, weil FGC ein bei G rechtwinkliges Dreieck ist,

$$\overline{FA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FC}^2 \text{ q. e. d.}$$

Die Auflösung ist immer möglich, so lange die von E auf AC gefällte Senkrechte und die auf AB im Halbirungspunkte errichtete Senkrechte einander nicht parallel sind, d. h. so lange die drei Punkte A, B, C nicht in derselben Geraden liegen. Die Gerade EF ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt A gehen und den gegebenen Kreis auf die verlangte Weise schneiden.

Man kommt auf die gegebene Construction sogleich, wenn man das Dreieck FAC betrachtet, in welchem

$$\overline{FC}^2=\overline{FA}^2+\overline{AC}^2-2FA\times AC\times\cos FAC$$

ist; weil nämlich

$$\overline{FC}^2=\overline{FA}^2-\overline{CD}^2$$

sein soll, so folgt

$$2AC\times FA\times\cos FAC=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$$

d. h.

$$2AC\times AG=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2.$$

II.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel im gleichen Verhältniss getheilt werden und die bis an die gegenüberliegenden Seiten verlängerten Theilungslinien einander gleich sind, so sind die getheilten Winkel einander gleich.

Beweis. Das Dreieck sei ABC (Taf. VII. Fig. 5.), die gleichen Theilungsstrecken, welche die Winkel BAC und ABC im gleichen Verhältniss theilen, seien AD und BE, so dass also

$$\text{W. } BAD \text{ . W. } DAC = \text{W. } ABE : \text{W. } EBC$$

ist. Wäre nun

$$\text{W. } ABC < \text{W. } BAC,$$

so lege man das Dreieck so umgekehrt auf sich selbst, dass der Punkt B auf den Punkt A und die beiden Theilungslinien auf einander fallen; dann fällt, wegen $BE=AD$, auch der Punkt E auf D, und weil bei der Theilung beider Winkel in demselben Verhältniss die Annahme

$$\text{W. } ABC < \text{W. } BAC$$

die beiden Ungleichungen

$$\text{W. } ABE < \text{W. } BAD \quad \text{und} \quad \text{W. } EBC < \text{W. } DAC$$

nach sich zieht, wird BA in eine Lage AF zwischen AB und AD, BC in eine Lage AG zwischen AD und AC kommen. Dabei müssen die drei Punkte F, D, G stets in gerader Linie liegen und Dreieck $FAG \cong$ Dr. ABC sein.

Es sind nun drei Fälle denkbar; entweder fällt der Punkt F ausserhalb des Dreiecks ABC, oder auf BC, oder innerhalb des Dreiecks ABC.

1) Der Punkt F falle ausserhalb ABC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (1.)), dann fällt G nothwendig innerhalb ABC; dann aber ist nach einem bekannten Satze

$$\text{W. } FGA > \text{W. } ACB,$$

also

$$\text{Dr. } FGA \text{ nicht } \cong \text{Dr. } ACB.$$

2) Der Punkt F falle auf BC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (2.)); und zwar nach dem oben Bemerkten nothwendig zwischen B und D; dann fällt auch G auf BC und zwar zwischen D und C; dann aber ist

$$\text{W. } FGA > \text{W. } ACB,$$

oder

$$\text{W. } FAG < \text{W. } AFB,$$

d. h., weil

$$AF = AB:$$

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABC;$$

also in beiden Fällen

$$\text{Dr. } FAG \text{ nicht } \cong \text{Dr. } ABC.$$

3) Der Punkt F falle innerhalb ABC (Taf. VII. Fig. 5. Nr. (3.)); dann fällt G ausserhalb ABC; zieht man nun die Gerade BF, so liegt diese nach der Voraussetzung zwischen BC und BA, und muss daher verlängert die Gerade AG schneiden; es ist also

$$\text{W. } FAG < \text{W. } AFB,$$

aber, weil $AF = AB$:

$$\text{W. } AFB = \text{W. } ABF,$$

also auch

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABF,$$

und um so mehr

$$\text{W. } FAG < \text{W. } ABC;$$

also wiederum

$$\text{Dr. } FAG \text{ nicht } \cong \text{Dr. } ABC.$$

Die Annahme W. $ABC < $ W. BAC führt also in jedem denkbaren Falle auf einen Widerspruch, und kann daher nicht richtig sein. Ganz ebenso wird bewiesen, dass eben so wenig W. $BAC <$ W. ABC sein kann; es muss also

$$\text{W. } ABC = \text{W. } BAC$$

sein, w. z. b. w.

III.

Man rechnet allgemein mit imaginären Zahlen ganz nach denselben Formeln, die für reelle Zahlen aufgestellt worden sind, ohne dass man bis jetzt die Giltigkeit der letztern Formeln auch für imaginäre Zahlen nachgewiesen hat. Die Ohm'sche Behauptung, dass z. B. die Gesetze des Addirens, nachdem sie für positive ganze Zahlen bewiesen worden sind, nun auch für alle anderen Zahlformen gelten, weil letztere erst später entstehen, weil man also durch Anwendung jener Gesetze auf dieselben jedenfalls nichts Unrichtiges, d. h mit Früherem in Widerspruch Stehendes erhalte, ist offenbar nicht stichhaltig. Man hat daher die Gesetze des Addirens der Reihe nach auch für negative ganze Zahlen, gebrochene und irrationale Zahlen bewiesen, und ebenso hat man es bei den andern Operationen gemacht. Ein Beweis für imaginäre Zahlen fehlt bis jetzt. Im Folgenden soll ein Versuch gemacht werden, diese Lücke auszufüllen.

Die imaginären Zahlen verdanken ihren Ursprung der Auflösung der quadratischen Gleichungen; wir müssen also von diesen ausgehen, wenn wir über jene etwas aussagen wollen. Seien zu dem Ende

$$(1.)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 - sx + p = 0 \\ \text{und} \\ x^2 - s_1 x + p_1 = 0 \end{array}\right.$$

zwei quadratische Gleichungen, deren Wurzeln beziehungsweise x', x'' und x'_1, x''_1 seien, so dass also

$$(2.)\qquad \left\{\begin{array}{l} s = x' + x'',\quad p = x'x'' \\ \text{und} \\ s_1 = x'_1 + x''_1,\quad p_1 = x'_1 x''_1 \end{array}\right.$$

ist. Dann ist

$$(3.)\quad \ldots\ldots\quad (x' + x'_1) + (x'' + x''_1) = s + s_1,$$

$$(x' + x'_1).(x'' + x''_1) = x'x'' + x'x''_1 + x''x'_1 + x'_1 x''_1,$$

$$(4.)\quad \ldots\ldots\quad (x' + x'_1).(x'' + x''_1) = p + p_1 + x'x''_1 + x''x'_1.$$

Nun ist aber

$$s^2 - 4p = (x' - x'')^2,$$
$$s^2_1 - 4p_1 = (x'_1 - x''_1)^2;$$

also

$$(5.) \; .. \; \begin{cases} \pm\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)} = (x'-x'')(x'_1-x''_1), \\ \pm\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)} = x'x'_1 - x'x''_1 - x''x'_1 + x''x''_1, \end{cases}$$

ferner

$$(6.) \; .... \; ss_1 = x'x'_1 + x'x''_1 + x''x'_1 + x''x''_1.$$

Zieht man die zweite der Gleichungen (5.) von der Gleichung (6.) ab und dividirt dann auf beiden Seiten mit 2, so folgt

$$x'x''_1 + x''x'_1 = \frac{1}{2}ss_1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)}.$$

Dieser Werth in die Gleichung (4.) substituirt gibt

$$(7.) \quad (x'+x'_1)(x''+x''_1) = p + p_1 + \frac{1}{2}ss_1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)}.$$

In den Gleichungen (3.) und (7.) ist enthalten folgender

I.) *Lehrsatz.* Die quadratische Gleichung

$$x^2 - (s+s_1)x + p + p_1 + \frac{1}{2}ss_1 \mp \sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)} = 0$$

hat zu Wurzeln die beiden Summen von je einer Wurzel der ersten und einer Wurzel der zweiten der Gleichungen (1.).

Ferner folgt, wenn man die zweite der Gleichungen (5.) und (6.) addirt und dann auf beiden Seiten mit 2 dividirt:

$$x'x'_1 + x''x''_1 = \frac{1}{2}ss_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)};$$

ausserdem ist $(x'x'_1).(x''x''_1) = pp_1$.

In den beiden letzten Gleichungen ist enthalten folgender

II.) *Lehrsatz.* Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (\frac{1}{2}ss_1 \pm \sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)}).x + pp_1 = 0$$

sind die beiden Producte von je einer Wurzel der ersten und einer Wurzel der zweiten der Gleichungen (1.)

Um nun den Uebergang zu den imaginären Zahlen zu machen, sei

$$\left.\begin{array}{l} s=2a,\quad p=a^2+b^2 \\ s_1=2a_1,\quad p_1=a^2_1+b^2_1 \end{array}\right\} \dots\dots (8.);$$

dann sind die Wurzeln der ersten der Gleichungen (1.) $a\pm b\sqrt{-1}$, die der zweiten $a_1\pm b_1\sqrt{-1}$. Ferner folgt aus den Gleichungen (8.)

$$s^2-4p=-4b^2,$$

$$s^2_1-4p_1=-4b^2_1,$$

also

$$\pm\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)}=\pm 4bb_1;$$

hiemit wird

$$p+p_1+\frac{1}{2}ss_1\mp\frac{1}{2}\sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)}$$
$$=a^2+b^2+a^2_1+b^2_1+2aa_1\mp 2bb_1$$
$$=(a+a_1)^2+(b\mp b_1)^2.$$

Sonach lässt sich der Lehrsatz (I.) so ausdrücken: Die quadratische Gleichung

$$x^2-2(a+a_1)x+(a+a_1)^2+(b\mp b_1)^2=0$$

hat zu Wurzeln die beiden Summen, welche entstehen, wenn man je einen der beiden Ausdrücke $a\pm b\sqrt{-1}$ und einen der beiden Ausdrücke $a_1\pm b_1\sqrt{-1}$ zu einander addirt. Da aber die Wurzeln jener quadratischen Gleichung

$$a+a_1\pm(b\mp b_1)\sqrt{-1},$$

wo die obern und untern Zeichen sich nicht nothwendig entsprechen, sind, so hat man

$$(a\pm b\sqrt{-1})+(a_1\pm b_1\sqrt{-1})=(a+a_1)\pm(b\mp b_1)\sqrt{-1}\quad\dots (A)$$

wo in Beziehung auf die Zeichen auf jeder Seite für sich die eben gemachte Bemerkung gleichfalls gilt. In dieser Gleichung (A) sind alle möglichen Fälle enthalten, wie auch die Zeichen linker Hand combinirt werden mögen.

Ferner hat man

$$\frac{1}{2}ss_1 \pm \sqrt{(s^2-4p)(s^2_1-4p_1)} = 2aa_1 \pm 2bb_1,$$

$$pp_1 = a^2a^2_1 + a^2b^2_1 + a^2_1b^2 + b^2b^2_1.$$

Der Lehrsatz (II.) lässt sich also jetzt folgendermaassen aussprechen: Die quadratische Gleichung

$$x^2-2(aa_1 \pm bb_1)x + a^2a^2_1 + a^2b^2_1 + a^2_1b^2 + b^2b^2_1 = 0$$

hat zu Wurzeln die beiden Producte, welche entstehen, wenn man je einen der beiden Ausdrücke $a \pm b\sqrt{-1}$ und einen der beiden Ausdrücke $a_1 \pm b_1\sqrt{-1}$ mit einander multiplicirt. Nun sind aber die Wurzeln jener Gleichung

$$(aa_1 \pm bb_1) \pm \sqrt{(aa_1 \pm bb_1)^2 - a^2a^2_1 - a^2b^2_1 - a^2_1b^2 - b^2b^2_1}$$
$$= (aa_1 \pm bb_1) \pm \sqrt{\pm 2aa_1bb_1 - a^2b^2_1 - a^2_1b^2}$$
$$= (aa_1 \pm bb_1) \pm (ab_1 \mp a_1b)\sqrt{-1},$$

wo die obern und untern Zeichen in den Klammern einander entsprechen, diesen aber nicht nothwendig die ausser den Klammern. Also

$$(a \pm b\sqrt{-1}).(a_1 \pm b_1\sqrt{-1}) = (aa_1 \pm bb_1) \pm (ab_1 \mp a_1b)\sqrt{-1} \ldots \text{(B)}$$

wo für die Zeichen auf der rechten Seite die eben gemachte Bemerkung gilt, auf der linken Seite dagegen die Zeichen beliebig gewählt werden dürfen.

Auch diese Gleichung (B) umfasst alle möglichen Fälle, wie auch die Zeichen auf der linken Seite combinirt werden mögen.

Die Formeln für die Differenz und für den Quotienten zweier imaginären Ausdrücke können auf dieselbe Weise abgeleitet oder aus den Formeln für die Summe und für das Product hergeholt werden.



XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn H. Scheffler, Bau-Conducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Aufgabe.

Es sind (Taf. VII Fig. 6.) die beiden Punkte A, B und der um C beschriebene Kreis gegeben; man sucht einen Kreis, welcher durch A und B geht, und den gegebenen Kreis in den Endpunkten Ein und desselben Durchmessers schneidet.

Auflösung. Man beschreibe einen beliebigen Kreis, welcher durch A und B geht und den gegebenen Kreis in zwei Punkten D, E schneidet, ziehe die Geraden AB, DE bis zu ihrem Durchschnittspunkte F und lege durch F und das Centrum C des gegebenen Kreises die Linie GH; so stellt dieselbe den gesuchten Durchmesser dar, und A, B, H, G sind vier Punkte des verlangten Kreises.

Beweis. Angenommen ein durch die drei Punkte A, B, H gelegter Kreis schneide die Gerade GF in einem Punkte G'; alsdann hat man

im Kreise $DEHG$ $\qquad FG.FH = FD.FE$,

im Kreise $ABHG'$ $\qquad FG'.FH = FA.FB$,

im Kreise $ABED$ $\qquad FD.FE = FA.FB$,

folglich $\qquad FG'.FH = FG.FH$,

$$FG' = FG,$$

d. h. die beiden Punkte G und G' fallen zusammen, oder der durch A, B, H gelegte Kreis geht auch durch G.

XXXII.

Miscellen.

Literarische Bemerkung von dem Herrn Dr. Grebe zu Cassel.

Um der im Archiv für M. u. Ph. Theil XV. Heft 2. S. 137. enthaltenen Aufforderung zu entsprechen, theile ich Folgendes mit. Das dort erwähnte Werk von Bramer führt den Titel: „BENJAMIN BRAMERI Beschreibung Eines sehr leichten Per-„spectiv- und grundreissenden Instruments auff einem Stande: „Auff Herrn Johan Faulhabers, bestellten Ingenieurs des Heyl: „Reichs Stadt Vlm, weitere continuation seines Mathemati-„schen Kunstspiegels, geordnet. Gedruckt zu Cassel, durch Johan „Wessel, vnd zu Franckfurt bey Eberhard Kiesern Kupfferste-„chern zu finden. Im Jahr 1630.“ Der Beschreibung selbst geht eine Zueignung an den Ehrnvesten Hochachtbarn vnd Kunstreichen Herrn Johan Faulhabern etc. voran, welche folgendermassen anfängt: „DAss in den Mathematischen künsten viel wun-„derbare vnd verborgene Geheimnuss, auch offtmahls Dinge, so „fast vnmöglich scheinen, gleichwohl aber durch geringe mittel „zu wege gebracht werden können, ist auss vielen dingen zu se-„hen. Als zum Exempel, durch zusammen: oder übereinander „schreibung einer Arithmetischen vnd Geometrischen pro-„gress, kan man viel wunderbare Dinge verrichten, wann nur die „Arithmetische mit einem 0, die Geometrische aber mit 1 „anfängt, Nemblich, das Multiplicirn durch Addirn, das Di-„vidirn durch Subtrahirn, Radicem quadratam extrahirn „durch halbirn, Cubicam durch 3, Zensicensicam durch 4, „Sursolidam 5, vnnd so forthan mit andern quantiteten di-„vidirn, Welches dem Herrn als einem jetziger zeit in Teutsch-„land berühmten Arithmetico, genugsamb bekant, vnnd also „ohne noht ware, dessen Exempel zu setzen. Damit aber die „vngeübten meine Meynung sehen mögen, stehen die Zahlen bei-„der progressionen also:

„Arithm:	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
„Geomet:	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.

„Arithm:	10.	11.	12.	13.
„Geomet:	1024.	2048.	4096.	8192.“

Einen Druckfehler des Buchs im drittletzten Gliede der geometrischen Progression habe ich verbessert. Es werden nun an diesen beiden Reihen die Grundregeln des Rechnens mit Logarithmen erläutert, und dann heisst es Seite 5. weiter: „Auss die„sem Fundament hat mein lieber Schwager und Praeceptor Jobst „Burgi, vor zwantzig vnd mehr Jahren, eine schöne progress „tabul mit ihren differentzen von 10 zu 10 in 9 Ziffern cal„culirt, auch zu Prag ohne bericht in Anno 1620 drucken lassen. Vnd „ist also die Invention der Logarith: nicht dess Neperi, „sondern von gedachtem Burgi (wie solches vielen wissend, vnd „ihm auch Herr Keplerus zeugnuss gibt) lange zuvor erfunden."

Um diese Stelle vollständig zu verstehen, muss man wissen, dass Bramer, zu Felsberg in Hessen 1588 geboren, schon in seiner frühesten Kindheit in das Haus seines Schwagers Burgi, der als Hofuhrmacher in den Diensten des Landgrafen Wilhelm IV. zu Cassel stand, gekommen und mit diesem 1603 nach Prag gezogen war. Wahrscheinlich war der Umstand, dass Burgi nach dem Tode von Bramers Schwester sich 1611 anderweitig verheirathete, die Veranlassung, dass Bramer in sein Vaterland zurückkehrte, wo er 1612 eine Anstellung als Baumeister zu Marburg erhielt. Statt zu sagen „vor zwantzig und mehr Jahren" hätte Bramer sich ausdrücken können: als ich noch in dem Hause meines Schwagers Burgi zu Prag lebte. Die erste Schrift von Bramer, die unter dem Titel: Problema, wie aus bekannt gegebenem Sinu eines Grades Minuten oder Secunden alle folgenden Sinus aufs leichteste zu finden und der canon sinuum zu absolviren seye, zu Marburg 1614 erschien, lässt vermuthen, dass Bramer die Neigung zum Berechnen von Tabellen sich bei seinem Schwager angeeignet habe, und diesem bei der Berechnung von dessen Logarithmentafel hülfreich zur Hand werde gewesen sein. Dass Burgi seine Tafel so lange zurückhielt und sie auch dann ohne Bericht herausgab, scheint bei ihm, der keine Sprachstudien gemacht hatte, aus unbesiegbarer Scheu vor schriftlicher Darstellung zu erklären zu sein.

Anmerkung.

Nach dem eingesandten Manuscript des Herrn Vfs. scheint das, was ich im Obigen habe gesperrt drucken lassen, in Bramers Buche mit lateinischen, das Uebrige mit deutschen Lettern gedruckt zu sein. G.

XXXIII.

Sur les fonctions elliptiques.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer,

de Groningue.

Les fonctions elliptiques ayant tiré leur origine du problème de l'intégration des fonctions irrationnelles, on a toujours en vue l'application, qu'on pourra en faire pour les quadratures. Mais par cette raison on a trop négligé, à ce qui me semble, les proprietés de ces fonctions, qui ne se prêtent pas immédiatement aux quadratures. Si donc il y a quelque succès dans l'analyse suivante, c'est, parcequ'en suivant une marche rationnelle, je ne me suis pas souci du parti, qu'on saura en tirer pour l'intégration des fonctions irrationnelles, persuadé, comme je suis, que toute analyse exacte trouvera ensuite son application.

---

§. I.

Théorie des fonctions elliptiques de la première espèce.

La fonction elliptique de la première espèce, dénotée par F_φ ou $F_{\varphi,c}$, est déterminée par l'équation

$$(1) \qquad F_\varphi = F_{\varphi,c} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

dans laquelle on a

$$\Delta^2\varphi = \Delta^2\varphi,c = 1 - c^2 \sin^2\varphi, \ \Delta_0 = 1,$$

c étant un module supposé positif et inférieur à l'unité.

En considérant au contraire la variable φ comme fonction de F_φ, et posant

$$p = F_\varphi,$$

on aura la fonction inverse

$$\varphi = \operatorname{amp} p,$$

ou bien

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} p.$$

Cette manière d'envisager la fonction elliptique et son inverse a ses difficultés. En effet, la fonction F_φ ou p étant déterminée par l'équation (1), il ne sera permis de considérer p comme variable indépendante, à moins qu'elle ne reçoive toute valeur possible réelle et imaginaire en laissant varier φ par degrés insensibles. Or ce n'est pas difficile de montrer, que cette condition ne sera pas remplie.

On pourra, à la verité, considérer φ ou $\sin\varphi$ comme fonction d'une variable indépendante x, et poser

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} x;$$

mais on aura tort d'affirmer, qu'il s'en suivra

$$p = x.$$

Tout ce qu'on pourra établir, c'est, que la fonction F_φ ou p, substituée à x, satisfera à l'équation

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{amp} x,$$

ou, que p sera une racine de cette équation résolue par rapport à x, savoir cette racine, qui s'évanouit avec φ.

Un pareil cas se présente, lorsqu'on voudra déduire la théorie des fonctions circulaires de l'équation

$$\psi = \psi_u = \int_0^u \frac{d_u}{\overline{\omega}_u},$$

dans lâquelle la fonction $\overline{\omega}_u$ est déterminée par les équations

$$\overline{\omega}^2_u = 1 - u^2, \ \overline{\omega}_0 = 1.$$

Or, comme on a la coutume de traiter d'abord les fonctions $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, et de passer ensuite à la fonction ψ enprimée par l'intégrale précédente, il sera de même plus méthodique de convertir, quant aux fonctions elliptiques, l'ordre suivi: et, au lieu de partir de l'équation(1), nous considérons directement la fonction regardée à l'ordinaire comme fonction inverse de la fonction elliptique.

Désignons par u cette fonction, ou, plutôt, représentons par u, v, w trois fonctions de x, c; en sorte qu'on ait

$$(2) \qquad u = P_x = P_{x,c}, \quad v = Q_x = Q_{x,c}, \quad w = R_x = R_{x,c}.$$

Alors les fonctions u, v, w seront complètement déterminées par le système des équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \partial_x u = vw, & \partial_x v = -wu, \quad \partial_x w = -c^2 uv, \\ P_0 = 0, & Q_0 = 1, \qquad R_0 = 1. \end{cases}$$

C'est de ces équations, qu'il faut déduire les proprietés des fonctions u, v, w.

On en tire à l'instant les relations par lesquelles ces fonctions sont liées entre elles: car, puisqu'on a

$$u\partial_x u = -v\partial_x v = -\frac{1}{c^2} w\partial_x w,$$

il viendra, en intégrant, et en observant, que u se change en 0, v et w en 1, lorsque x s'évanouit,

$$u^2 = 1 - v^2 = \frac{1}{c^2}(1 - w^2),$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} P_x^2 = 1 - Q_x^2 = \frac{1}{c^2}(1 - R_x^2), \\ Q_x^2 = 1 - P_x^2 = -\frac{1}{c^2}(b^2 - R_x^2), \\ R_x^2 = 1 - c^2 P_x^2 = b^2 + c^2 Q_x^2, \end{cases}$$

ayant posé pour abréger

$$b^2 = 1 - c^2.$$

Désignons ensuite par x une racine de l'équation

$$u = P_x$$

résolue par rapport à x; on aura

$$u = P_{\mathrm{x}},$$

et x sera une fonction de u, qu'on pourra représenter par

$$\mathrm{x} = X_u.$$

Mais u étant une fonction de x, il s'ensuit que x sera aussi une fonction de x. Donc on aura

$$\partial_x u = \partial_x P_{\mathrm{x}} = \partial_{\mathrm{x}} P_{\mathrm{x}} \partial_x \mathrm{x},$$

d'où

$$\partial_x \mathrm{x} = \frac{\partial_x u}{\partial_\mathrm{x} P_\mathrm{x}} = \frac{vw}{Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x}};$$

et comme, en ayant égard aux équations (4), on a

$$Q_\mathrm{x}^2 = 1 - P_\mathrm{x}^2 = 1 - u^2 = v^2,$$
$$R_\mathrm{x}^2 = 1 - c^2 P_\mathrm{x}^2 = 1 - c^2 u^2 = w^2,$$

il se présente deux cas, selon qu'on a

$$Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x} = vw, \text{ ou } Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x} = -vw,$$

auxquels cas correspondent par suite

$$\partial_x \mathrm{x} = 1, \qquad \partial_x \mathrm{x} = -1;$$

d'où, en intégrant,

$$v + \mathrm{x} = x, \qquad v' - \mathrm{x} = x,$$

v et v' étant constantes par rapport à x. En substituant ces valeurs de x dans les équations correspondantes, on obtiendra

$$P_{v+\mathrm{x}} = P_\mathrm{x}, \qquad P_{v'-\mathrm{x}} = P_\mathrm{x},$$
$$Q_{v+\mathrm{x}} R_{v+\mathrm{x}} = Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x}, \; Q_{v'-\mathrm{x}} R_{v'-\mathrm{x}} = -Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x};$$

puis, en prenant $\mathrm{x} = 0$:

$$P_v = 0, \qquad P_{v'} = 0,$$
$$Q_v R_v = 1, \quad Q_{v'} R_{v'} = -1,$$

équations auxquelles les constantes v et v' doivent satisfaire.

D'ailleurs l'équation

$$u = P_\mathrm{x},$$

differentiée par rapport à u donnera

$$1 = \partial_\mathrm{x} P_\mathrm{x} \partial_u \mathrm{x} = Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x} \partial_u \mathrm{x},$$

d'où

$$\partial_u \mathrm{x} = \frac{1}{Q_\mathrm{x} R_\mathrm{x}}.$$

Ajoutons que, comme on a $P_0 = 0$, on pourra choisir la racine x de manière, qu'elle s'evanouisse avec u, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{X}_0 = 0;$$

et, en considérant Q_x et R_x comme fonctions de u, si l'on pose

$$Q\mathrm{x}=\varpi_u, \quad R\mathrm{x}=\varpi'_u,$$

on aura

$$\varpi_u^2=1-u^2, \qquad \varpi_0=1$$
$$\varpi'^2=1-c^2u^2, \quad \varpi'_0=1,$$

d'où

$$\varpi'_u=\varpi_{cu};$$

donc la racine x sera complètement déterminée en fonction de u, et il suivra

$$\mathrm{x}=\mathrm{X}_u=\mathrm{X}_{u,c}=\int_0^u \frac{du}{\varpi_u\varpi_{cu}},$$

ou, si l'on veut,

$$\mathrm{x}=\mathrm{X}_u=\mathrm{X}_{u,c}=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-c^2u^2}},$$

pourvu que les radicaux $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{1-c^2u^2}$ soient pris de manière à devenir égaux à l'unité, lorsque u s'evanouit.

La racine x déterminée par l'équation précédente peut remplacer avec succès la fonction elliptique. Pour reconnaitre la liaison entre ces deux fonctions, posons

$$\psi=\psi_u=\int_0^u \frac{du}{\varpi_u};$$

on aura, non seulement

$$\partial_u\psi=\frac{1}{\varpi_u},$$

mais encore

$$\sin\psi=u, \quad \cos\psi=\varpi_u;$$

puis, en considérant ϖ_{cu} et x comme fonctions de ψ, si l'on fait

$$\Delta_\psi=\varpi_{cu}, \quad \mathrm{x}=F_\psi,$$

on aura

$$\Delta_\psi{}^2=1-c^2u^2=1-c^2\sin^2\psi,$$
$$\Delta_0=1, \qquad F_0=0,$$

et, à cause de

$$\frac{1}{\varpi_u \varpi_{cu}} = \partial_u x = \partial_u F_\psi = \partial_\psi F_\psi \, \partial_u \psi = \frac{\partial_\psi F_\psi}{\varpi_u},$$

il viendra

$$\partial_\psi F_\psi = \frac{1}{\varpi_{cu}} = \frac{1}{\Delta \psi},$$

d'où

$$x = F_\psi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Remarquons que, ψ étant introduite comme fonction de u, il ne sera permis d'attribuer à ψ que des valeurs, qu'elle acquiert par suite de la variation de u; d'où il suit que la valeur réelle de ψ restera toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Mais cela ne nous empêche pas de trouver la valeur de F_φ, lorsque φ depasse les limites de ψ. En effet, si, pour une valeur quelconque de φ, on fait

$$F_\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

on aura

$$F_{\pi+\psi} = F_\pi + F_\psi,$$

d'où, n étant un nombre entier,

$$F_{n\pi+\psi} = n F_\pi + F_\psi;$$

puis, en vertu de $F_\varphi = -F_{-\varphi}$, on aura encore

$$F_{\pi-\psi} = F_\pi - F_\psi,$$

et, en prenant $\psi = \frac{\pi}{2}$,

$$F_{\frac{\pi}{2}} = F_\pi - F_{\frac{\pi}{2}},$$

d'où

$$F_\pi = 2 F_{\frac{\pi}{2}};$$

il viendra par conséquent

$$F_{n\pi+\psi} = 2n F_{\frac{\pi}{2}} + F_\psi = 2n X_1 + x.$$

Nous avons fait cette démarche, pour montrer la connexion entre la racine x et entre la fonction elliptique F_φ. Toutefois on pourra se dispenser de cette fonction en introduisant la racine x, comme cela a été fait; et le résultat principal de ce paragraphe sera compris dans les termes suivants.

Soient

$$u=P_x=P_{x,c},\ v=Q_x=Q_{x,c},\ w=R_x=R_{x,c}$$

trois fonctions de x, c déterminées par les équations

$$\partial_x u=vw,\quad \partial_x v=-wu,\quad \partial_x w=-c^2uv,$$
$$P_0=0,\qquad Q_0=1,\qquad R_0=1;$$

soit x une fonction de u déterminée par léquation

$$\mathrm{x}=\mathrm{X}_u=\mathrm{X}_{u,c}=\int_0^u\frac{du}{\overline{\omega}_u\,\overline{\omega}_{cu}},$$

dans laquelle

$$\overline{\omega}_u=1-u^2,\quad \overline{\omega}_0=1;$$

on aura

$$u=P_x=P_{\mathrm{x}},$$
$$\overline{\omega}_u=Q_{\mathrm{x}},\quad \overline{\omega}_{cu}=R_{\mathrm{x}}.$$

et

$$x=v+\mathrm{x},\ \text{ou}\ x=v'-\mathrm{x},$$

selon que l'on a

$$Q_xR_x=Q_{\mathrm{x}}R_{\mathrm{x}},\ \text{ou}\ Q_xR_x=-Q_{\mathrm{x}}R_{\mathrm{x}},$$

v et v' étant deux constantes assujetties à la condition de vérifier les équations

$$P_v=0,\qquad P_{v'}=0$$
$$Q_vR_v=1,\qquad Q_{v'}R_{v'}=-1.$$

Ajoutons que, pour des valeurs finies de P_x, les fonc ons P_x, Q_x, R_x se changeront en $\sin x$, $\cos x$, 1, lorsqu'on suppose $c=0$; de sorte qu'on aura

$$P_{x,0}=\sin x,\ Q_{x,0}=\cos x,\ R_{x,0}=1.$$

On pourra de même considérer P_x, Q_x, R_x comme des fonctions particulières d'une autre classe de fonctions, dont il sera aisé d'établir les équations différentielles. En continuant de cette manière, il sera utile d'embrasser toutes ces fonctions par une dénomination et une notation générale. On pourra p. e. appeler ces fonc-

tions fonctions circulaires, en les classifiant en divers ordres et rangs, et en les désignant par le signe

$$\underline{n|m},$$

m indiquant le rang et n l'ordre de la fonction circulaire. Dans cet état de choses $\sin x$ sera la première et $\cos x$ la seconde fonction circulaire du premier ordre, et P_x sera la première, Q_x la seconde et R_x la troisième fonction circulaire du second ordre; ce qu'on exprimera par la notation

$$\sin x = \underline{1|1}_x,\ \cos x = \underline{1|2}_x,$$

$$P_x = \underline{2|1}_x,\ Q_x = \underline{2|2}_x,\ R_x = \underline{2|3}_x,$$

et ainsi de suite.

§. II.

Sur les valeurs particulières des fonctions circulaires du second ordre.

Puisque la valeur de la fonction ϖ_u, déterminée par les équations

$$\varpi_u^2 = 1 - u^2,\ \varpi_0 = 1,$$

est positive pour $u=0$, elle restera positive et comprise entre les limites 0 et 1, en faisant varier u par degrés insensibles entre les limites -1 et $+1$.

Si donc la valeur de c restera comprise entre les limites 0 et 1, et qu'on pose

$$b = \varpi_c, \tag{1}$$

la valeur de b sera positive et inférieur ou, tout au plus, égale à 1. Puis, comme on a

$$b^2 = 1 - c^2,$$

il s'en suit

$$c^2 = 1 - b^2;$$

et on aura, non seulement

$$c^2 = \varpi_b^2,$$

mais encore

$$c = \varpi_b:$$

d'où l'on conclut, que b se changera en c, lorsque c se réduit à b.

Mais la valeur de ϖ_u sera encore positive, lorsqu'en partant de la valeur nulle de u, on attribue à u^2 des valeurs negatives, ou à u des valeurs imaginaires, et elle restera positive en faisant varier u jusqu'a l'infini. Donc en désignant par ∞ l'infini positif, et par i une des racines quarrées de -1, mais toujours la même racine, on aura

$$\varpi_{\infty i}=\infty .$$

Cela posé, on sera assuré, que la fonction sous le signe intégral dans l'équation

$$x=X_u=\int_0^u \frac{du}{\varpi_u \varpi_{cu}}$$

restera positive en faisant $u=1$ et $u=\infty i$; ce qui conduit à considérer les valeurs particulières X_1 et $X_{\infty i}$, que nous désignons, pour abréger, par τ ou τ_c et ϱ ou ϱ_c; en sorte qu'on ait

$$\tau=\tau_c=\int_0^1 \frac{du}{\varpi_u \varpi_{cu}}, \quad \varrho=\varrho_c=\int_0^{\infty i} \frac{du}{\varpi_u \varpi_{cu}}.$$

Maintenant nous avons vu dans le paragraphe précédent, qu'en déterminant les fonctious circulaires du second ordre

$$u=P_x=P_{x,c},\ v=Q_x=Q_{x,c},\ w=R_x=R_{x,c}$$

par le système des équations

$$\partial_x u=vw,\ \partial_x v=-wu,\ \partial_x w=-c^2uv$$
$$P_0=0, \quad Q_0=1, \quad R_0=1,$$

on aura

$$P_x=u,\ Q_x=\varpi_u,\ R_x=\varpi_{cu};$$

donc, à cause de

$$\varpi_0=1,\ \varpi_c=b,\ \varpi_1=0,\ \varpi_{\infty i}=\infty,\ X_1=\tau,\ X_{\infty i}=\varrho,$$

il résultera

$$(2) \qquad \begin{cases} P_\tau=1, & Q_\tau=0, & R_\tau=b, \\ P_\varrho=\infty i, & Q_\varrho=\infty, & R_\varrho=\infty. \end{cases}$$

Quant aux rapports

$$\frac{P_\varrho}{Q_\varrho},\ \frac{P_\varrho}{R_\varrho}$$

on pourra s'assurer, qu'ils seront égaux au produit d'une quantité positive par i; et comme on a

$$Q_x^2 = 1 - P_x^2, \quad R_x^2 = 1 - c^2 P_x^2$$

on obtiendra, non seulement

$$\left(\frac{P_\varrho}{Q_\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{P_\varrho^2} - 1} = -1, \quad \left(\frac{P_\varrho}{R_\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{P_\varrho^2} - c^2} = -\frac{1}{c^2},$$

mais encore

$$(3) \qquad \frac{P_\varrho}{Q_\varrho} = i, \quad \frac{P_\varrho}{R_\varrho} = \frac{i}{c}.$$

Ajoutons, qu'entre les fonctions τ et ϱ, exprimées par les équations

$$(4) \qquad \tau = \int_0^1 \frac{du}{\overline{\omega}_u \overline{\omega}_{cu}}, \quad \varrho = \int_0^{\infty i} \frac{du}{\overline{\omega}_u \overline{\omega}_{cu}},$$

il existe une relation assez simple. En effet, si l'on pose

$$u = i \frac{u'}{\overline{\omega}_{u'}},$$

on trouvera

$$\overline{\omega}_u = \frac{1}{\overline{\omega}_{u'}}, \quad \overline{\omega}_{cu} = \frac{\overline{\omega}_{bu'}}{\overline{\omega}_{u'}}, \quad du = i \frac{du'}{\overline{\omega}_{u'}^3},$$

d'où

$$\frac{du}{\overline{\omega}_u \overline{\omega}_{cu}} = i \frac{du'}{\overline{\omega}_{u'} \overline{\omega}_{bu'}}.$$

Or, en faisant varier u' depuis 0 jusqu'à 1, $\frac{u}{i}$ variera depuis 0 jusqu'à ∞: donc on aura

$$\int_0^{\infty i} \frac{du}{\overline{\omega}_u \overline{\omega}_{cu}} = i \int_0^1 \frac{du'}{\overline{\omega}_{u'} \overline{\omega}_{bu'}},$$

ou

$$(5) \qquad \varrho_c = i \tau_b;$$

d'où encore, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$\varrho_b = i \tau_c.$$

Nous ne nous arrêteront pas aux divers procédés propres à l'évaluation des fonctions τ et ϱ. Celui, qui se présente d'abord,

consiste dans le développement de la fonction $\frac{1}{\varpi_{cu}}$ en série suivant les puissances entières et positives de u; ce qui conduit par des quadratures connues à la série

$$(6)\qquad \tau = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \ldots\right\},$$

d'où, à cause de l'équation (5),

$$(7)\qquad \varrho = \frac{\pi i}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 b^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 b^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) b^6 + \ldots\right\}.$$

§. III.

Sur les formules fondamentales des fonctions circulaires du second ordre.

Les fonctions circulaires du second ordre

$$(1)\qquad u = P_x = P_{x,c},\quad v = Q_x = Q_{x,c},\quad w = R_x = R_{x,c}$$

sont complètement déterminées par le système des équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x u = vw, & \partial_x v = -wu, & \partial_x w = -c^2 uv, \\ P_0 = 0, & Q_0 = 1, & R_0 = 1; \end{array}\right.$$

d'où l'on a déduit, §. I. (4), les relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u^2 = 1 - v^2 = \frac{1}{c^2}(1 - w^2), \\ v^2 = 1 - u^2 = -\frac{1}{c^2}(b^2 - w^2), \\ w^2 = 1 - c^2 u^2 = b^2 + c^2 v^2, \end{array}\right.$$

ayant posé, pour abréger,

$$(4)\qquad b^2 = 1 - c^2.$$

Ajoutons toutefois, pour complèter la détermination de b, qu'elle sera toujours prise dans le sens de devenir 1, lorsque c s'évanouit, comme elle est introduite par l'équation (1), §. II.

Cela posé, on tire des équations (2) et (3):

$$(\partial_x u)^2 = 1 - (1 + c^2) u^2 + c^2 u^4,$$
$$(\partial_x v)^2 = -b^2 + (b^2 - c^2) v^2 + c^2 v^4,$$
$$(\partial_x w)^2 = b^2 - (1 + b^2) w^2 + w^4;$$

d'où, en différentiant par rapport à x,

$$\partial_x^2 u = -u\{1 + c^2 - 2c^2 u^2\},$$
$$\partial_x^2 v = -v\{c^2 - b^2 - 2c^2 v^2\},$$
$$\partial_x^2 w = -w\{1 + b^2 - 2w^2\}.$$

Soient maintenant u', v', w' trois fonctions, qui se déduisent de u, v, w par le changement de x en $x+h$, h étant independante de x, en sorte qu'on ait

$$(5) \qquad u' = P_{x+h}, \quad v' = Q_{x+h}, \quad w' = R_{x+h};$$

on aura de même

$$(6) \qquad \partial_x u' = v'w', \quad \partial_x v' = -w'u', \quad \partial_x w' = -c^2 u' v',$$

$$(\partial_x u')^2 = 1 - (1+c^2) u'^2 + c^2 u'^4,$$
$$(\partial_x v')^2 = -b^2 + (b^2 - c^2) v'^2 + c^2 v'^4,$$
$$(\partial_x w')^2 = b^2 - (1+b^2) w'^2 + w'^4$$

et

$$\partial_x^2 u' = -u'\{1 + c^2 - 2c^2 u'^2\},$$
$$\partial_x^2 v' = -v'\{c^2 - b^2 - 2c^2 v'^2\},$$
$$\partial_x^2 w' = -w'\{1 + b^2 - 2w'^2\}.$$

De ces équations, jointes aux précédentes, on déduit:

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = \{1 - c^2 (uu')^2\}\{u^2 - u'^2\},$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = -\{b^2 + c^2 (vv')^2\}\{v^2 - v'^2\},$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = \{b^2 - (ww')^2\}\{w^2 - w'^2\}$$

et

$$u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u = -2c^2 uu'(u^2 - u'^2),$$
$$v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v = -2c^2 vv'(v^2 - v'^2),$$
$$w\partial_x^2 w' - w'\partial_x^2 w = -2ww'(w^2 - w'^2);$$

d'où

$$\frac{u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u}{(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2} = -\frac{2c^2 uu'}{1 - c^2 (uu')^2},$$

$$\frac{v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v}{(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2} = \frac{2c^2 vv'}{b^2 + c^2 (vv')^2},$$

$$\frac{w\partial_x^2 w' - w'\partial^2_x w}{(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2} = -\frac{2ww'}{b^2 - (ww')^2}.$$

Mais on a

$$u\partial_x^2 u' - u'\partial_x^2 u = \partial_x (u\partial_x u' - u'\partial_x u),$$
$$v\partial_x^2 v' - v'\partial_x^2 v = \partial_x (v\partial_x v' - v'\partial_x v),$$
$$w\partial_x^2 w' - w'\partial_x^2 w = \partial_x (w\partial_x w' - w'\partial_x w),$$

et

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = (u\partial_x u' - u'\partial_x u)(u\partial_x u' + u'\partial_x u),$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = (v\partial_x v' - v'\partial_x v)(v\partial_x v' + v'\partial_x v),$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = (w\partial_x w' - w'\partial_x w)(w\partial_x w' + w'\partial_x w),$$

ou

$$(u\partial_x u')^2 - (u'\partial_x u)^2 = (u\partial_x u' - u'\partial_x u)\partial_x (uu'),$$
$$(v\partial_x v')^2 - (v'\partial_x v)^2 = (v\partial_x v' - v'\partial_x v)\partial_x (vv'),$$
$$(w\partial_x w')^2 - (w'\partial_x w)^2 = (w\partial_x w' - w'\partial_x w)\partial_x (ww');$$

donc on obtiendra

$$\frac{\partial_x (u\partial_x u' - u'\partial_x u)}{u\partial_x u' - u'\partial_x u} = -\frac{2c^2 uu'\partial_x (uu')}{1 - c^2 (uu')^2},$$

$$\frac{\partial_x (v\partial_x v' - v'\partial_x v)}{v\partial_x v' - v'\partial_x v} = \frac{2c^2 vv'\partial_x (vv')}{b^2 + c^2 (vv')^2},$$

$$\frac{\partial_x (w\partial_x w' - w'\partial_x w)}{w\partial_x w' - w'\partial_x w} = -\frac{2ww'\partial_x (ww')}{b^2 - (ww')^2};$$

ou, en ayant égard aux équations (2) et (6),

$$\frac{\partial_x (uv'w' - u'vw)}{uv'w' - u'vw} = \frac{\partial_x (1 - c^2 u^2 u'^2)}{1 - c^2 u^2 u'^2},$$

$$\frac{\partial_x (vw'u' - v'wu)}{vw'u' - v'wu} = \frac{\partial_x (b^2 + c^2 v^2 v'^2)}{b^2 + c^2 v^2 v'^2},$$

$$\frac{\partial_x (wu'v' - w'uv)}{wu'v' - w'uv} = \frac{\partial_x (b^2 - w^2 w'^2)}{b^2 - w^2 w'^2}.$$

Puis, comme, en général, d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial_x p}{p} = \frac{\partial_x q}{q}$$

on tire

$$\frac{\partial_x p}{p} - \frac{\partial_x q}{q} = 0$$

ou



$$\partial_x \frac{p}{q} = 0,$$

il viendra

$$\partial_x \frac{uv'w' - u'vw}{1 - c^2u^2u'^2} = 0,$$

$$\partial_x \frac{vw'u' - v'wu}{b^2 + c^2v^2v'^2} = 0,$$

$$\partial_x \frac{wu'v' - w'uv}{b^2 - w^2w'^2} = 0;$$

ou bien, en vertu des équations (1) et (5),

$$\partial_x \frac{P_x Q_{x+h} R_{x+h} - P_{x+h} Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P^2_{x+h}} = 0,$$

$$\partial_x \frac{Q_x R_{x+h} P_{x+h} - Q_{x+h} R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q^2_{x+h}} = 0,$$

$$\partial_x \frac{R_x P_{x+h} Q_{x+h} - R_{x+h} P_x Q_x}{b^2 - R_x^2 R^2_{x+h}} = 0.$$

En intégrant, et en déterminant les constantes d'intégration par la supposition de $x=0$, ce qui changera P_x, Q_x, R_x en 0, 1, 1, on sera conduit à

$$\frac{P_x Q_{x+h} R_{x+h} - P_{x+h} Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P^2_{x+h}} = -P_h,$$

$$\frac{Q_x R_{x+h} P_{x+h} - Q_{x+h} R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q^2_{x+h}} = \frac{R_h P_h}{b^2 + c^2 Q_h^2},$$

$$\frac{R_x P_{x+h} Q_{x+h} - R_{x+h} P_x Q_x}{b^2 - R_x^2 R^2_{x+h}} = \frac{P_h Q_h}{b^2 - R_h^2};$$

et, en faisant $x+h=y$, ou $h=y-x$, et en observant, qu'en vertu des équations (1) et (3) on aura

$$b^2 + c^2 Q_h^2 = R_h^2, \quad b^2 - R_h^2 = -c^2 Q_h^2,$$

il s'en suivra

$$P_{y-x} = -\frac{P_x Q_y R_y - P_y Q_x R_x}{1 - c^2 P_x^2 P_y^2},$$

$$\frac{P_{y-x}}{R_{y-x}} = \frac{Q_x R_y P_y - Q_y R_x P_x}{b^2 + c^2 Q_x^2 Q_y^2},$$

$$\frac{P_{y-x}}{Q_{y-x}} = -c^2 \frac{R_x P_y Q_y - R_y P_x Q_x}{b^2 - R^2_x R_y^2}.$$

Les variables x et y étant indépendantes l'une de l'autre, on obtiendra, en prenant $y=0$,

$$P_{-x}=-P_x,\ \frac{P_{-x}}{R_{-x}}=-\frac{P_x}{R_x},\quad \frac{P_{-x}}{Q_{-x}}=-\frac{P_x}{Q_x},$$

d'où

$$(7)\qquad P_x=-P_{-x},\ Q_x=Q_{-x},\ R_x=R_{-x}.$$

En substituant donc $-x$ à x, les équations précédentes donneront

$$(8)\quad \begin{cases} P_{x+y}=\dfrac{P_xQ_yR_y+P_yQ_xR_x}{1-c^2P_x^2P_y^2}, \\ \dfrac{P_{x+y}}{R_{x+y}}=\dfrac{Q_xR_yP_y+Q_yR_xP_x}{b^2+c^2Q_x^2Q_y^2}, \\ \dfrac{P_{x+y}}{Q_{x+y}}=-c^2\dfrac{R_xP_yQ_y+R_yP_xQ_x}{b^2-R_x^2R_y^2}. \end{cases}$$

On pourra déduire de ces équations une foule de formules. Il ne suffira pas même de les établir toutes trois, puisque deux se déduisent de la troisième à l'aide des relations (3).

Profitons d'abord des valeurs particulières du paragraphe précédent. En déterminant τ et ϱ par les équations (4) ou (6) et (7), §. II., on a trouvé, (2), (3), §. II.,

$$(9)\quad \begin{cases} P_\tau=1,\quad Q_\tau=0,\quad R_\tau=b, \\ \dfrac{1}{P_\varrho}=0,\quad \dfrac{1}{Q_\varrho}=0,\quad \dfrac{1}{R_\varrho}=0, \\ \dfrac{P_\varrho}{Q_\varrho}=i,\quad \dfrac{Q_\varrho}{R_\varrho}=\dfrac{1}{c},\quad \dfrac{R_\varrho}{P_\varrho}=\dfrac{c}{i}. \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs particulières on tire des équations (8) jointes aux relations (3)

$$P_{x+\tau}=\frac{Q_x}{R_x},\quad \frac{P_{x+\tau}}{R_{x+\tau}}=\frac{1}{b}Q_x,\quad \frac{P_{x+\tau}}{Q_{x+\tau}}=-\frac{1}{b}\frac{Q_x}{P_x},$$

$$P_{x+\varrho}=\frac{1}{cP_x},\ \frac{P_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}}=\frac{i}{cQ_x},\quad \frac{P_{x+\varrho}}{Q_{x+\varrho}}=\frac{i}{R_x};$$

d'où

$$(10)\quad \begin{cases} P_{x+\tau}=\dfrac{Q_x}{R_x},\quad Q_{x+\tau}=-b\dfrac{P_x}{R_x},\quad R_{x+\tau}=b\dfrac{1}{R_x}, \\ P_{x+\varrho}=\dfrac{1}{cP_x},\ Q_{x+\varrho}=\dfrac{1}{ci}\dfrac{R_x}{P_x},\quad R_{x+\varrho}=\dfrac{1}{i}\dfrac{Q_x}{P_x}. \end{cases}$$

De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$(11)\qquad \sigma=\sigma_c=\tau+\varrho\,,$$

ou, suivant l'équation (5). §. II.

$$\sigma_c=\tau_c+i\tau_b,$$

il viendra

$$P_{x+\sigma}=\frac{Q_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}},\quad Q_{x+\sigma}=-b\frac{P_{x+\varrho}}{R_{x+\varrho}}.\quad R_{x+\sigma}=b\frac{1}{R_{x+\varrho}},$$

ou

$$(12)\qquad P_{x+\sigma}=\frac{1}{c}\frac{R_x}{Q_x},\qquad Q_{x+\sigma}=\frac{b}{ci}\frac{1}{Q_x},\quad R_{x+\sigma}=bi\frac{P_x}{Q_x},$$

et, en prenant $x=0$,

$$P_\sigma=\frac{1}{c},\quad Q_\sigma=\frac{b}{ci},\quad R_\sigma=0.$$

Si maintenant on substitue successivement $y+\tau$, $y+\sigma$, $y+\varrho$ à y dans les formules (8), en observant, que des relations (3) on déduit

$$(14)\quad \begin{cases} 1-c^2P_x^2P_y^2=Q_y^2+R_x^2P_y^2=R_y^2+c^2Q_x^2P_y^2,\\ b^2+c^2Q_x^2Q_y^2=R_y^2-c^2P_x^2Q_y^2=b^2P_y^2+R_x^2Q_y^2,\\ b^2-R_x^2R_y^2=c^2(b^2P_y^2-Q_x^2R_y^2)=-c^2(Q_y^2-P_x^2R_y^2), \end{cases}$$

on trouvera, à l'aide des formules (10) et (12),

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{Q_{x+y}}{R_{x+y}}=-\dfrac{b^2P_xP_y-Q_xR_xQ_yR_y}{b^2+c^2Q_x^2Q_y^2},\\ Q_{x+y}=\dfrac{Q_xQ_y-P_xR_xP_yR_y}{1-c^2P_x^2P_y^2},\\ \dfrac{Q_{x+y}}{P_{x+y}}=c^2\dfrac{R_xP_yQ_y-R_yP_xQ_x}{R_x^2-R_y^2}; \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{R_{x+y}}{Q_{x+y}}=-c^2\dfrac{b^2P_xP_y+Q_xR_xQ_yR_y}{b^2-R_x^2R_y^2},\\ \dfrac{R_{x+y}}{P_{x+y}}=\dfrac{Q_xR_yP_y-Q_yR_xP_x}{Q_x^2-Q_y^2},\\ R_{x+y}=\dfrac{R_xR_y-c^2P_xQ_xP_yQ_y}{1-c^2P_x^2P_y^2}; \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_{x+y}} = \dfrac{P_xQ_yR_y - P_yQ_xR_x}{P_x^2 - P_y^2}, \\[2mm] \dfrac{1}{Q_{x+y}} = -c^2\dfrac{Q_xQ_y + P_xR_xP_yR_y}{b^2 - R_x^2R_y^2}, \\[2mm] \dfrac{1}{R_{x+y}} = \dfrac{R_xR_y + c^2P_xQ_xP_yQ_y}{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}. \end{cases}$$

En combinant ces formules on en tirera d'autres, que nous n'écrivons pas. Toutefois il sera bon d'en établir encore quelques-unes, dont nous profiterons dans la suite.

En vertu des équations (7) on déduit des formules (17)

$$P_{x-y} = \frac{P_x^2 - P_y^2}{P_xQ_yR_y + P_yQ_xR_x},$$

$$Q_{x-y} = -\frac{1}{c^2}\frac{b^2 - R_x^2R_y^2}{Q_xQ_y - P_xR_xP_yR_y},$$

$$R_{x-y} = \frac{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}{R_xR_y - c^2P_xQ_xP_yQ_y}.$$

En y joignant les formules (8), (15), (16), on trouvera

$$(18)\quad \begin{cases} P_{x+y}P_{x-y} = \dfrac{P_x^2 - P_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}, \\[2mm] Q_{x+y}Q_{x-y} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{b^2 - R_x^2R_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}, \\[2mm] R_{x+y}R_{x-y} = \dfrac{b^2 + c^2Q_x^2Q_y^2}{1 - c^2P_x^2P_y^2}; \end{cases}$$

formules qui, à l'aide des équations (10), (12), (14), se réduisent à

$$(19)\quad \begin{cases} P_{x+y}\,P_{x-y} = -P_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P_y^2}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P^2_{y+\varrho}}}, \\[4mm] Q_{x+y}\,Q_{x-y} = Q_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P^2_{y+\tau}}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P^2_{y+\varrho}}}, \\[4mm] R_{x+y}\,R_{x-y} = R_y^2\dfrac{1 - \dfrac{P_x^2}{P^2_{y+\sigma}}}{1 - \dfrac{P_x^2}{P^2_{y+\varrho}}}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on fait $x+y=z$, d'où $y=z-x$, z étant indépendante de x, on aura

$$\partial_x P_y = -Q_y R_y,\ \partial_x Q_y = R_y P_y,\ \partial_x R_y = c^2 P_y Q_y:$$

donc on tirera des formules (17), (16), (15):

$$\frac{1}{P_z} = -\frac{P_x \partial_x P_y + P_y \partial_x P_x}{P_x^2 - P_y^2},$$

$$\frac{R_z}{P_z} = \frac{Q_x \partial_x Q_y + Q_y \partial_x Q_x}{Q_x^2 - Q_y^2},$$

$$\frac{Q_z}{P_z} = \frac{R_x \partial_x R_y + R_y \partial_x R_x}{R_x^2 - R_y^2};$$

d'où

$$(20)\quad \begin{cases} P_x^2 - P_y^2 = -P_z \partial_x (P_x P_y), \\ Q_x^2 - Q_y^2 = \dfrac{P_z}{R_z} \partial_x (Q_x Q_y), \\ R_x^2 - R_y^2 = \dfrac{P_z}{Q_z} \partial_x (R_x R_y). \end{cases}$$

Or, suivant les relations (3), on a

$$(21)\quad P_x^2 - P_y^2 = -(Q_x^2 - Q_y^2) = -\frac{1}{c^2}(R_x^2 - R_y^2):$$

donc il suivra

$$\partial_x (P_x P_y) = \frac{1}{R_z} \partial_x (Q_x Q_y) = \frac{1}{c^2 Q_z} \partial_x (R_x R_y);$$

puis, en intégrant et en observant, que, pour $x=0$, y se réduit à z, on obtiendra

$$P_x P_y = \frac{1}{R_z}(Q_x Q_y - Q_z) = \frac{1}{c^2 Q_z}(R_x R_y - R_z);$$

d'où, en remettant $x+y$ à z et ayant égard aux relations (3),

$$(22)\quad \begin{cases} Q_x Q_y - P_x P_y R_{x+y} = Q_{x+y}, \\ R_x R_y - c^2 P_x P_y Q_{x+y} = R_{x+y}, \\ R_x R_y R_{x+y} - c^2 Q_x Q_y Q_{x+y} = b^2. \end{cases}$$

§. IV.

Relation entre les variables et les modules de deux fonctions circulaires du second ordre dont le rapport est constant.

En posant

$$(1)\quad \begin{cases} P_{y_1,c_1}=\alpha_1 P_{x,c}, & Q_{y_1,c_1}=\beta_1 Q_{x,c}, \quad R_{y_1,c_1}=\gamma_1 R_{x,c}, \\ P_{y_2,c_2}=\alpha_2 P_{x,c}, & Q_{y_2,c_2}=\beta_2 R_{x,c}, \quad R_{y_2,c_2}=\gamma_2 Q_{x,c}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} P_{y_3,c_3}=\alpha_3 Q_{x,c}, & Q_{y_3,c_3}=\beta_3 R_{x,c}, \quad R_{y_3,c_3}=\gamma_3 P_{x,c}, \\ P_{y_4,c_4}=\alpha_4 Q_{x,c}, & Q_{y_4,c_4}=\beta_4 P_{x,c}, \quad R_{y_4,c_4}=\gamma_4 R_{x,c}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} P_{y_5,c_5}=\alpha_5 R_{x,c}, & Q_{y_5,c_5}=\beta_5 P_{x,c}, \quad R_{y_5,c_5}=\gamma_5 Q_{x,c}, \\ P_{y_6,c_6}=\alpha_6 R_{x,c}, & Q_{y_6,c_6}=\beta_6 Q_{x,c}, \quad R_{y_6,c_6}=\gamma_6 P_{x,c}; \end{cases}$$

il s'agit de déterminer y_k en fonction de x, et α_k, β_k, γ_k, c_k en fonction de c.

Comme on a

$$\partial_x P_{x,c}=Q_{x,c}R_{x,c}, \quad \partial_x Q_{x,c}=-R_{x,c}P_{x,c}, \quad \partial_x R_{x,c}=-c^2 P_{x,c}Q_{x,c},$$

il s'en suit

$$\partial_x P_{y_k,c_k}=Q_{y_k,c_k}R_{y_k,c_k}\partial_x y_k, \quad \partial_x Q_{y_k,c_k}=-R_{y_k,c_k}P_{y_k,c_k}\partial_x y_k,$$
$$\partial_x R_{y_k,c_k}=-c^2_k P_{y_k,c_k}Q_{y_k,c_k}\partial_x y_k;$$

et, en faisant, pour abréger,

$$(4)\qquad \partial_x y_k=\mu_k,$$

on en déduira, au moyen des équations (1), (2), (3):

$$(5)$$

$$\begin{cases} \mu_1=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1\gamma_1}=\dfrac{\beta_1}{\gamma_1\alpha_1}=\dfrac{c^2}{c_1^2}\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1\beta_1}, \quad \mu_2=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2\gamma_2}=c^2\dfrac{\beta_2}{\gamma_2\alpha_2}=\dfrac{1}{c_2^2}\dfrac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}, \\ \mu_3=-\dfrac{\alpha_3}{\beta_3\gamma_3}=c^2\dfrac{\beta_2}{\gamma_2\alpha_2}=-\dfrac{1}{c_3^2}\dfrac{\gamma_3}{\alpha_3\beta_3}, \quad \mu_4=-\dfrac{\alpha_4}{\beta_4\gamma_4}=-\dfrac{\beta_4}{\gamma_4\alpha_4}=\dfrac{c^2}{c^2_4}\dfrac{\gamma_4}{\alpha_4\beta_4}, \\ \mu_5=-c^2\dfrac{\alpha_5}{\beta_5\gamma_5}=-\dfrac{\beta_5}{\gamma_5\alpha_5}=\dfrac{1}{c_5^2}\dfrac{\gamma_5}{\alpha_5\beta_5}, \quad \mu_6=-c^2\dfrac{\alpha_6}{\beta_6\gamma_6}=\dfrac{\beta_6}{\gamma_6\alpha_6}=-\dfrac{1}{c_6^2}\dfrac{\gamma_6}{\alpha_6\beta_6}: \end{cases}$$

d'où l'on voit, que μ_k est indépendante de x, de sorte qu'on aura

$$(6) \qquad y_k = \mu_k x + \delta_k,$$

δ_k étant constante par rapport à x. En prenant donc respectivement $x=0$, $x=\tau$, $x=\sigma$ dans les équations (1), (2), (3), et en observant, qu'on a trouvé, (2), (9), (13), §. III.

$$P_0=0, \quad Q_0=1, \quad R_0=1,$$
$$P_\tau=1, \quad Q_\tau=0, \quad R_\tau=b,$$
$$P_\sigma=\frac{1}{c}, \quad Q_\sigma=\frac{b}{ci}, \quad R_\sigma=0,$$

il viendra

$$P_{\delta_1,c_1}=0, \quad Q_{\delta_1,c_1}=\beta_1, \quad R_{\delta_1,c_1}=\gamma_1,$$
$$P_{\delta_2,c_2}=0, \quad Q_{\delta_2,c_2}=\beta_2, \quad R_{\delta_2,c_2}=\gamma_2,$$
$$P_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3}=0, \quad Q_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3}=\beta_3 b, \quad R_{\mu_3\tau+\delta_3,c_3}=\gamma_3,$$
$$P_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4}=0, \quad Q_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4}=\beta_4, \quad R_{\mu_4\tau+\delta_4,c_4}=\gamma_4 b,$$
$$P_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5}=0, \quad Q_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5}=\beta_5\frac{1}{c}, \quad R_{\mu_5\sigma+\delta_5,c_5}=\gamma_5\frac{b}{ci},$$
$$P_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6}=0, \quad Q_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6}=\beta_6\frac{b}{ci}, \quad R_{\mu_6\sigma+\delta_6,c_6}=\gamma_6\frac{1}{c},$$

équations, auxquelles on satisfait en faisant

$$(7) \quad \delta_1=0,\ \delta_2=0,\ \delta_3=-\mu_3\tau,\ \delta_4=-\mu_4\tau,\ \delta_5=-\mu_5\sigma,\ \delta_6=-\mu_6\sigma;$$

ce qui donnera

$$(8) \quad \begin{cases} \beta_1=1,\ \beta_2=1,\ \beta_3=\frac{1}{b}, & \beta_4=1,\ \beta_5=c,\ \beta_6=\frac{ci}{b}, \\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=1, & \gamma_4=\frac{1}{b},\ \gamma_5=\frac{ci}{b},\ \gamma_6=c. \end{cases}$$

Les constantes β_k, γ_k étant ainsi déterminées, les équations (5) se réduiront à

$$\mu_1=\alpha_1=\frac{1}{\alpha_1}=\frac{c^2}{c_1^2}\frac{1}{\alpha_1}, \quad \mu_2=\alpha_2=c^2\frac{1}{\alpha_2}=\frac{1}{c_2^2}\frac{1}{\alpha_2},$$

$$\mu_3=-b\alpha_3=\frac{c^2}{b}\frac{1}{\alpha_3}=-\frac{b}{c_3^2}\frac{1}{\alpha_3}, \quad \mu_4=-b\alpha_4=-b\frac{1}{\alpha_4}=\frac{c^2}{bc_4^2}\frac{1}{\alpha_4},$$

$$\mu_5=-\frac{b}{i}\alpha_5=-\frac{b}{i}\frac{1}{\alpha_5}=\frac{i}{bc_5^2}\frac{1}{\alpha_5}, \quad \mu_6=-\frac{b}{i}\alpha_6=\frac{i}{b}\frac{1}{\alpha_6}=-\frac{b}{ic_6^2}\frac{1}{\alpha_6};$$

d'où l'on tire

$$\alpha_1{}^2=1,\ \alpha_2{}^2=c^2,\ \alpha_3{}^2=-\frac{c^2}{b^2},\quad \alpha_4{}^2=1,\ \alpha^2{}_5=1,\ \alpha_6{}^2=\frac{1}{b^2},$$

$$c_1{}^2=c^2,\ c_2{}^2=\frac{1}{c^2},\ c^2{}_3=-\frac{b^2}{c^2},\quad c_4{}^2=-\frac{c^2}{b^2},\quad c_5{}^2=\frac{1}{b^2},\ c_6{}^2=b^2,$$

$$\mu_1=\alpha_1,\ \mu_2=\alpha_2,\ \mu_3=-b\alpha_3,\ \mu_4=-b\alpha_4,\ \mu_5=-\frac{b}{i}\alpha_5,\ \mu_6=-\frac{b}{i}\alpha_6.$$

Ces équations déterminant les constantes α_k et c_k au signe près, on pourra en choisir à volonté. Nous posons parsuite

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha_1=1,\ \alpha_2=c_1,\ \alpha_3=-\dfrac{ci}{b},\ \alpha_4=-1,\ \alpha_5=1,\ \alpha_6=\dfrac{1}{b}, \\ c_1=-c,\ c_2=\dfrac{1}{c},\ c_3=\dfrac{b}{ci},\ c_4=\dfrac{ci}{b},\ c_5=\dfrac{1}{b},\ c_6=b, \\ \mu_1=1,\ \mu_2=c,\ \mu_3=ci,\ \mu_4=b,\ \mu_5=bi,\ \mu_6=i. \end{cases}$$

En éliminant y_k, α_k, β_k, γ_k, c_k à l'aide des équations (6), (7), (8), (9), les équations (1), (2), (3) se réduiront à

$$(10)\qquad P_{x,-c}=P_{x,c},\quad Q_{x,-c}=Q_{x,c},\quad R_{x,-c}=R_{x,c},$$

$$(11)\qquad P_{cx,\frac{1}{c}}=cP_{x,c},\quad Q_{cx,\frac{1}{c}}=R_{x,c},\quad R_{cx,\frac{1}{c}}=Q_{x,c},$$

$$(12)\quad \begin{cases} P_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=-\dfrac{ci}{b}Q_{x,c},\ Q_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=\dfrac{1}{b}R_{x,c},\ R_{ci(x-\tau),\frac{b}{ci}}=P_{x,c}, \\ P_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=-Q_{x,c},\ Q_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=P_{x,c},\ R_{b(x-\tau),\frac{ci}{b}}=\dfrac{1}{b}R_{x,c}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} P_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=R_{x,c},\ Q_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=cP_{x,c},\ R_{bi(x-\sigma),\frac{1}{b}}=\dfrac{ci}{b}Q_{x,c}, \\ P_{i(x-\sigma),b}=\dfrac{1}{b}R_{x,c},\ Q_{i(x-\sigma),b}=\dfrac{ci}{b}Q_{x,c},\ R_{i(x-\sigma),b}=cP_{x,c}. \end{cases}$$

Les formules (10) font voir, que les fonctions P, Q, R ne changeront pas en remplaçant le module c par $-c$. Au moyen des formules (11) on passe d'un module c inférieur à l'unité au module reciproque $\frac{1}{c}$ supérieur à l'unité. Il suffira donc de conserver des formules (12) et (13) les trois premières ou les trois dernières, puisqu'on en déduit les autres à l'aide des formules (11). En conservant les trois dernières on en tire

$$(14)\begin{cases} P_{bx,\frac{ci}{b}} = -Q_{x+\tau,c}, & Q_{bx,\frac{ci}{b}} = P_{x+\tau,c}, \quad R_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{1}{b} R_{x+\tau,c}, \\ P_{ix,b} = \frac{1}{b} R_{x+\sigma,c}, & Q_{ix,b} = \frac{ci}{b} Q_{x+\sigma,c}, \quad R_{ix,b} = c\, P_{x+\sigma,c}; \end{cases}$$

ou, suivant les équations (10) et (12), §. III.

$$(15)\quad P_{bx,\frac{ci}{b}} = b\frac{P_{x,c}}{R_{x,c}}, \quad Q_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{Q_{x,c}}{R_{x,c}}, \quad R_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{1}{R_{x,c}},$$

$$(16)\quad P_{ix,b} = i\frac{P_{x,c}}{Q_{x,c}}, \quad Q_{ix,b} = \frac{1}{Q_{x,c}}, \quad R_{ix,b} = \frac{R_{x,c}}{Q_{x,c}}.$$

Les formules (15) serviront à la réduction des fonctions circulaires du second ordre à module imaginaire, et les formules (16) à la réduction des mêmes fonctions à variable imaginaire.

Ajoutons, que, par suite des relations

$$Q^2{}_x = 1 - P^2{}_x, \quad R^2{}_x = 1 - c^2 P_x{}^2,$$

jointes aux formules (10) et (12), §. III. on trouvera aisément

$$1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}} = \frac{1}{Q^2{}_{y+\tau}}(Q^2{}_{y+\tau} - Q^2{}_{x+\tau}) = \frac{1}{c^2 Q^2{}_{y+\tau}}(R^2{}_{y+\tau} - R^2{}_{x+\tau})$$

$$= \frac{R^2{}_y}{c^2 P^2{}_y}\left(\frac{1}{R^2{}_y} - \frac{1}{R^2{}_x}\right) = \frac{1}{c^2 P^2{}_y R^2{}_x}(R^2{}_x - R^2{}_y) = \frac{1}{R^2{}_x}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y}\right),$$

et

$$1 - \frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}} = \frac{1}{R^2{}_{y+\sigma}}(R^2{}_{y+\sigma} - R^2{}_{x+\sigma}) = \frac{c^2}{R^2{}_{y+\sigma}}(Q^2{}_{y+\sigma} - Q^2{}_{x+\sigma})$$

$$= \frac{Q^2{}_y}{P^2{}_y}\left(\frac{1}{Q^2{}_y} - \frac{1}{Q^2{}_x}\right) = \frac{1}{P^2{}_y Q^2{}_x}(Q^2{}_x - Q^2{}_y) = \frac{1}{Q^2{}_x}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P_y{}^2}\right):$$

donc on aura

$$1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y} = R_x{}^2\left(1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}}\right) = Q^2{}_x\left(\frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}}\right),$$

ou

$$(17)\quad P^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_y}\right) = -Q^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{Q^2{}_{x+\tau}}{Q^2{}_{y+\tau}}\right)$$

$$= -\frac{1}{c^2}R^2{}_{x+\varrho}\left(1 - \frac{R^2{}_{x+\sigma}}{R^2{}_{y+\sigma}}\right),$$

et

$$(18)\qquad \frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_y}}{1-\frac{P^2_x}{P^2_z}}=\frac{1-\frac{Q^2_{x+\tau}}{Q^2_{y+\tau}}}{1-\frac{Q^2_{x+\tau}}{Q^2_{z+\tau}}}=\frac{1-\frac{R^2_{x+\sigma}}{R^2_{y+\sigma}}}{1-\frac{R^2_{x+\sigma}}{R^2_{z+\sigma}}}.$$

Or des formules (11), (12), (13) on déduit

$$\frac{P_x}{P_y}=\frac{P_{cx,\frac{1}{c}}}{P_{cy,\frac{1}{c}}},\quad \frac{Q_{x+\tau}}{Q_{y+\tau}}=\frac{P_{cix,\frac{b}{ci}}}{P_{ciy,\frac{b}{ci}}}=\frac{P_{bx,\frac{ci}{b}}}{P_{by,\frac{ci}{b}}},$$

$$\frac{R_{x+\sigma}}{R_{y+\sigma}}=\frac{P_{bix,\frac{1}{b}}}{P_{biy,\frac{1}{b}}}=\frac{P_{ix,b}}{P_{iy,b}}:$$

donc il viendra, eu égard aux formules (18),

$$(19)\qquad \frac{1-\frac{P^2_{x,c}}{P^2_{y,c}}}{1-\frac{P^2_{x,c}}{P^2_{z,c}}}=\frac{1-\frac{P^2_{bx,\frac{ci}{b}}}{P^2_{by,\frac{ci}{b}}}}{1-\frac{P^2_{bx,\frac{ci}{b}}}{P^2_{bz,\frac{ci}{b}}}}=\frac{1-\frac{P^2_{ix,b}}{P^2_{iy,b}}}{1-\frac{P^2_{ix,b}}{P^2_{iz,b}}}$$

$$=\frac{1-\frac{P^2_{cx,\frac{1}{c}}}{P^2_{cy,\frac{1}{c}}}}{1-\frac{P^2_{cx,\frac{1}{c}}}{P^2_{cz,\frac{1}{c}}}}=\frac{1-\frac{P^2_{cix,\frac{b}{ci}}}{P^2_{ciy,\frac{b}{ci}}}}{1-\frac{P^2_{cix,\frac{b}{ci}}}{P^2_{ciz,\frac{b}{ci}}}}=\frac{1-\frac{P^2_{bix,\frac{1}{b}}}{P^2_{biy,\frac{1}{b}}}}{1-\frac{P^2_{bix,\frac{1}{b}}}{P^2_{bi,z,\frac{1}{b}}}}.$$

§. V.

Relation entre les fonctious circulaires du second ordre par rapport à une variable x et entre les mêmes fonctions prises par rapport à un multiple de x.

En vertu des formules (8), (15), (16) §. III. on a

$$(1)\quad \begin{cases} P_{x+y}=\dfrac{P_xQ_yR_y+P_yQ_xR_x}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}, \\ Q_{x+y}=\dfrac{Q_xQ_y-P_xP_yR_xR_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}, \\ R_{x+y}=\dfrac{R_xR_y-c^2P_xP_yQ_xQ_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}. \end{cases}$$

En y joignant les équations (7)

$$(2)\qquad P_x=-P_{-x},\ Q_x=Q_{-x},\ R_x=R_{-x},$$

il viendra, en substituant $-y$ à y,

$$(3)\quad \begin{cases} P_{x-y}=\dfrac{P_xQ_yR_y-P_yQ_xR_x}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}, \\ Q_{x-y}=\dfrac{Q_xQ_y+P_xP_yR_xR_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}, \\ R_{x-y}=\dfrac{R_xR_y+c^2P_xP_yQ_xQ_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}; \end{cases}$$

d'où

$$(4)\quad \begin{cases} P_{x+y}+P_{x-y}=2\dfrac{P_xQ_yR_y}{1-c^2P^2{}_xP_y{}^2}, \\ Q_{x+y}+Q_{x-y}=2\dfrac{Q_xQ_y}{1-c^2P_x{}^2P^2{}_y}, \\ R_{x+y}+R_{x-y}=2\dfrac{R_xR_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}. \end{cases}$$

En prenant $x=y$, et en observant, qu'on a

$$(5)\qquad P_0=0,\quad Q_0=1,\quad R_0=1,$$

on trouvera

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2x}=2\dfrac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P_x^4}, \\ Q_{2x}=2\dfrac{Q_x^2}{1-c^2P^4_x}-1, \\ R_{2x}=2\dfrac{R_x^2}{1-c^2P_x^4}-1; \end{cases}$$

puis, en ayant égard aux relations

$$(7)\qquad Q^2_x=1-P_x^2,\quad R_x^2=1-c^2P^2_x,$$

il s'en suivra

$$(8)\quad \begin{cases} P_{2x}=2\dfrac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P_x^4}, \\ Q_{2x}=\dfrac{1-2P_x^2+c^2P_x^4}{1-c^2P_x^4}, \\ R_{2x}=\dfrac{1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4}{1-c^2P_x^4}. \end{cases}$$

En substituant ensuite $2x$ à x et x à y, on tirera des formules (4)

$$P_{3x}+P_x=2\frac{P_{2x}Q_xR_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2},$$

$$Q_{3x}+Q_x=2\frac{Q_{2x}Q_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2},$$

$$R_{3x}+R_x=2\frac{R_{2x}R_x}{1-c^2P^2_{2x}P_x^2};$$

d'où, éliminant P_{2x}, Q_{2x}, R_{2x} par les formules (8),

$$P_{3x}=P_x\left\{\frac{4Q^2_xR^2_x(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\},$$

$$Q_{3x}=Q_x\left\{\frac{2(1-2P^2_x+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\},$$

$$R_{3x}=R_x\left\{\frac{2(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^2-4c^2P_x^4Q_x^2R_x^2}-1\right\};$$

ou, en ayant égard aux relations (7),

$$(9)\begin{cases} P_{3x}=P_x\dfrac{3-4(1+c^2)P_x^2+6c^2P_x^4-c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}, \\ Q_{3x}=Q_x\dfrac{1-4P_x^2+6c^2P_x^4-4c^4P_x^6+c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}, \\ R_{3x}=R_x\dfrac{1-4c^2P_x^2+6c^2P_x^4-4c^2P_x^6+c^4P_x^8}{1-6c^2P_x^4+4c^2(1+c^2)P_x^6-3c^4P_x^8}. \end{cases}$$

Remplaçons encore x par $2x$ dans les formules (6); il viendra

$$P_{4x}=2\frac{P_{2x}Q_{2x}R_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4},$$

$$Q_{4x}=2\frac{Q_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4}-1,$$

$$R_{4x}=2\frac{R_{2x}}{1-c^2P_{2x}^4}-1;$$

d'où, à l'aide des formules (8),

$$(10)\begin{cases} P_{4x}=4P_xQ_xR_x\dfrac{(1-2P_x^2+c^2P_x^4)(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)(1-c^2P_x^4)}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}, \\ Q_{4x}=2\dfrac{(1-2P_x^2+c^2P_x^4)^2(1-c^2P_x^4)^2}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}-1, \\ R_{4x}=2\dfrac{(1-2c^2P_x^2+c^2P_x^4)^2(1-c^2P_x^4)^2}{(1-c^2P_x^4)^4-16c^2P_x^4Q_x^4R_x^4}-1. \end{cases}$$

Sans qu'on ait besoin de développer les èxpressions contenues dans les seconds membres de ces équations, on reconnaitra, que P^2_{4x}, Q^2_{4x}, R^2_{4x} peuvent être représentées par des fonctions rationelles et fractionnaires par rapport à P_x^2. On sera donc conduit à supposer par induction, qu'on saura satisfaire aux équations

$$(11)\quad P_{nx}=\frac{A_n}{D_n},\quad Q_{nx}=\frac{B_n}{D_n},\quad R_{nx}=\frac{C_n}{D_n},$$

en désignant par A^2_n, B^2_n, C^2_n, D^2_n des fonctions entières par rapport à P_x^2, et par n un nombre entier et positif.

En comparant les équations (6), (8), (10) aux équations précédentes, on conclura, que $3=2^2-1$ sera le degré de A_2^2, $4=2^2$ celui de D^2_2, $9=3^2$ celui de A_3^2, $8=3^2-1$ celui de D_3^2, $15=4^2-1$ celui de A_4^2, $16=4^2$ celui de D_4^2; et on supposera par induction, que n^2-1 et n^2 seront les degrés de A_n^2 et D_n^2, lorsque n désigne un nombre pair, et que n^2 et n^2-1 seront les degrés de A_n^2 et D^2_n, lorsque n désigne un nombre impair.

Allons confirmer ces suppositions, en démontrant, qu'elles seront verifiées pour le nombre $m+2$, lorsqu'on les suppose exactes pour les nombres m et $m+1$.

On a trouvé, (18) §. III.,

$$P_{x+y}P_{x-y}=\frac{P_x^2-P_y^2}{1-c^2P_x^2P_y^2};$$

en substituant $(m+1)x$ à x et x à y, il viendra

$$P_{(m+2)x}P_{mx}=\frac{P^2{}_{(m+1)x}-P^2{}_x}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_{(m+1)x}},$$

d'où, en vertu des équations (11),

$$\frac{A_{m+2}A_m}{D_{m+2}D_m}=\frac{A^2{}_{m+1}-P^2{}_xD^2{}_{m+1}}{D^2{}_{m+1}-c^2P_x{}^2A^2{}_{m+1}}.$$

De plus, en concevant, que A_m, A_{m+1}, D_m, D_{m+1} soient des fonctions déterminées d'après les suppositions faites ci-dessus, on disposera de A_{m+2} et D_{m+2} de manière qu'on ait

$$A_{m+2}\ A_m=A^2{}_{m+1}-P^2{}_xD^2{}_{m+1},$$

$$D_{m+2}\ D_m=D^2{}_{m+1}-c^2P^2{}_xA^2{}_{m+1}.$$

Dans le cas, où m désigne un nombre pair, $m+1$ sera impair: donc $A^2{}_{m+1}$ et $D^2{}_{m+1}$ représenteront des fonctions entières par rapport à $P^2{}_x$ du degré $(m+1)^2$ et $(m+1)^2-1$; d'où il suit, en vertu des équations précédentes, que $A_{m+2}\ A_m$ et $D_{m+2}D_m$ seront des fonctions entiéres par rapport à $P^2{}_x$ du degré $(m+1)^2$ et $(m+1)^2+1$, ou $A^2{}_{m+2}A^2{}_m$ et $D^2{}_{m+2}D^2{}_m$ du degré $2(m+1)^2$ et $2(m+1)^2+2$. Or, dans ce cas $A^2{}_m$ et $D^2{}_m$ étant du degré m^2-1 et m^2, il s'en suit que $A^2{}_{m+2}$ sera du degré

$$2(m+1)^2-(m^2-1)=(m+2)^2-1$$

et $D^2{}_{m+2}$ du degré

$$2(m+1)^2+2-m^2=(m+2)^2.$$

Dans l'autre cas, où m designe un nombre impair, $m+1$ sera pair, et par suite $A^2{}_{m+1}$ et $D^2{}_{m+1}$ seront du degré $(m+1)^2-1$ et $(m+1)^2$, puis $A_{m+2}A_m$ et $D_{m+2}D_m$ du degré $(m+1)^2+1$ et $(m+1)^2$, ou $A^2{}_{m+2}\ A^2{}_m$ et $D^2{}_{m+2}D^2{}_m$ du degré $2(m+1)^2+2$ et $2(m+1)^2$. Or, dans ce cas $A^2{}_m$ et $D^2{}_m$ étant du degré m^2 et m^2-1, il s'en suit que $A^2{}_{m+2}$ sera du degré $(m+2)^2$ et $D^2{}_{m+2}$ du degré $(m+2)^2-1$.

On voit que dans l'un et l'autre cas $A^2{}_{m+2}$ et $D^2{}_{m+2}$ seront des fonctions entières par rapport à $P^2{}_x$, et, que leur degré se déduit de celui de $A^2{}_m$ et $D^2{}_m$ en changeant m en $m+2$. D'après

ce qu'on vient de dire les suppositions faites subsisteront par conséquent pour tout nombre entier et positif n.

On satisfera donc à l'équation

$$P_{nx}=\frac{A_n}{D_n},$$

en désignant par $A^2{}_n$ et $D^2{}_n$ des fonctions entières par rapport à $P^2{}_x$ du degré n^2-1 et n^2, lorsque n est pair, et du degré n^2 et n^2-1, lorsque n est impair.

Plus géneralement, l'expression

$$\frac{1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{nz}}},$$

en supposant y et z indépendantes de x, pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de $P^2{}_x$ du degré n^2; de manière que, si pour abréger on fait

$$\text{(12)} \qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p=\overset{p=n}{\underset{p=0}{\Pi}} f_p=f_0 f_1 f_2 \cdots f_{n-1},$$

on aura

$$\text{(13)} \qquad \frac{1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{nz}}}=\overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \frac{1-\frac{P_x{}^2}{M^2{}_{p,q}}}{1-\frac{P^2{}_x}{N^2{}_{p,q}}};$$

donc il restera à trouver les racines $M_{p,q}$ et $N_{p,q}$, pour que la relation entre P_{nx} et P_x soit entièrement déterminée.

Rappelons nous pour cela les formules (10) et (12) du §. III., savoir:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} P_{x+\varrho}=\frac{1}{c}\frac{1}{P_x}, & Q_{x+\varrho}=\frac{1}{ci}\frac{R_x}{P_x}, \quad R_{x+\varrho}=\frac{1}{i}\frac{Q_x}{P_x}, \\ P_{x+\sigma}=\frac{1}{c}\frac{R_x}{Q_x}, & Q_{x+\sigma}=\frac{b}{ci}\frac{1}{Q_x}, \quad R_{x+\sigma}=bi\frac{P_x}{Q_x}, \\ P_{x+\tau}=\frac{Q_x}{R_x}, & Q_{x+\tau}=-b\frac{P_x}{R_x}, \quad R_{x+\tau}=i\frac{1}{R_x}; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(15)\quad \begin{cases} P_{x+2\varrho}=P_x,\ Q_{x+2\varrho}=-Q_x,\ R_{x+2\varrho}=-R_x, \\ P_{x+2\sigma}=-P_x,\ Q_{x+2\sigma}=Q_x,\ R_{x+2\sigma}=-R_x, \\ P_{x+2\tau}=-P_x,\ Q_{x+2\tau}=-Q_x,\ R_{x+2\tau}=R_x. \end{cases}$$

La fonction P_x^2 restera donc la même, lorsque x se change en $x+2\varrho$, ou en $x+2\sigma$, ou en $x+2\tau$, et, par suite, il en sera de même, lorsque x se change en $x+2p\varrho+2q\sigma+2r\tau$, p, q, r étant des nombres entiers.

Maintenant le premier membre de l'équation (13) s'évanouira pour $x=y$; d'où il suit que P_y^2 sera une racine du second membre. Mais le premier membre restera le même, lorsque ny se change en

$$ny+2p\varrho+2q\sigma+2r\tau,$$

ou y en

$$y+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma+\frac{2r}{n}\tau:$$

donc les autres racines du second membre seront comprises dans l'expression

$$P^2_{y+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma+\frac{2r}{n}\tau},$$

ou, simplement,

$$P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho},$$

puisqu'on a

$$(16)\qquad \sigma=\tau+\varrho.$$

Ajoutons que, pour avoir les racines distinctes, il suffira d'attribuer à p et q successivement les valeurs 0, 1, 2,.... $n-1$, puisque tout autre nombre donnera, en vertu des formules (15), des racines égales aux précédentes. On pourra donc poser

$$M^2_{p,q}=P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}.$$

On trouvera pareillement $N_{p,q}$, en permutant y et z, en sorte qu'on ait

$$N^2_{p,q}=P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}.$$

L'équation (13) se réduira par conséquent à

$$(17)\qquad \frac{1-\dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1-\dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{nz}}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q\,\frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}.$$

Remarquons encore que, lorsque la fonction $f_{p,q}$ jouit de la proprieté de rester la même si q se change en $q+n$, on aura

$$(18)\qquad \overset{n}{\Pi}_q f_{p,q}=\overset{n}{\Pi}_q f_{p,q+r}$$

pour tout nombre entier r, et par suite aussi si $r=p$. Donc on aura

$$(19)\qquad \overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q f_{p,q}=\overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q f_{p,p+q};$$

ce qui permet de substituer à la formule (17), en ayant égard aux équations (15) et (16),

$$(20)\quad \frac{1-\dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1-\dfrac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{nz}}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q\,\frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\varrho+\frac{2q}{n}\sigma}}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q\,\frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\sigma+\frac{2q}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\sigma+\frac{2q}{n}\tau}}}.$$

En faisant $z=\frac{1}{n}\varrho$, et observant que $\frac{1}{P_\varrho}=0$, on déduit de la formule (17)

$$1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\overset{n}{\Pi}_q\,\frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varrho}}}.$$

Puis, en faisant successivement

$$y=\varepsilon=0,\ \ y=\frac{1}{n}\tau,\ \ y=\frac{1}{n}\sigma,$$

en observant que

$$P_0=0,\ \ P_\tau=1,\ \ P_\sigma=\frac{1}{c},\ \ 1-P^2{}_x=Q^2{}_x,\ \ 1-c^2P^2{}_x=R^2{}_x,$$

et posant

$$(22)\quad \begin{cases} A^2_n = P^2_{n\varepsilon} \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\varepsilon + \frac{2p}{n}\tau + \frac{2q}{n}\varrho}}\right\}, \\ B^2_n = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau + \frac{2q}{n}\varrho}}\right\}, \\ C^2_n = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau + \frac{2q+1}{n}\varrho}}\right\}, \\ D^2_n = \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q \left\{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau + \frac{2q+1}{n}\varrho}}\right\}, \end{cases}$$

il viendra

$$P^2_{nx} = \frac{A^2_n}{D^2_n}, \quad Q^2_{nx} = \frac{B^2_n}{D^2_n}, \quad R^2_{nx} = \frac{C^2_n}{D^2_n},$$

ou bien

$$(23)\qquad P_{nx} = \frac{A_n}{D_n}, \quad Q_{nx} = \frac{B_n}{D_n}, \quad R_{nx} = \frac{C_n}{D_n},$$

en supposant que A_n, B_n, C_n, D_n se réduisent à $n\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x = \varepsilon = 0$.

§. VI. Transformation du module.

On a trouvé dans le §. précédent que l'expression

$$\frac{1 - \dfrac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1 - \dfrac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}},$$

en supposant y et z indépendantes de x, pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de P^2_x du degré n^2. On obtient un autre énoncé de ce théorème, en posant, que cette expression pourra être représentée par le rapport de deux fonctions entières de φx^2 du degré n, φx^2 étant elle-même le rapport de deux fonctions entières de P_x^2 du degré n.

En approfondissant ce résultat on sera conduit à considérer la fonction φx déterminée par l'équation

$$(1)\qquad \varphi x = \overset{n}{\Pi}_p P_{x + \frac{2p}{n}\tau}$$

ayant posé, comme ci-dessus,

$$(2)\qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p = \overset{p=n}{\underset{p=0}{\Pi}} f_p = f_0 f_1 f_2 \dots f_{n-1}\,.$$

On aura par suite

$$\varphi_x = P_x P_{x+\frac{2}{n}\tau} P_{x+\frac{4}{n}\tau} \dots P_{x+\frac{2(n-1)}{n}\tau}$$

et

$$\varphi_{x+\frac{2}{n}\tau} = P_{x+\frac{2}{n}\tau} P_{x+\frac{4}{n}\tau} P_{x+\frac{6}{n}\tau} \dots P_{x+\frac{2n}{n}\tau}\,;$$

mais on a, (15), §. V.

$$(3)\qquad P_{x+2\tau} = -P_x:$$

donc il suivra

$$(4)\qquad \varphi_{x+\frac{2}{n}\tau} = -\varphi_x\,.$$

Puis, comme de l'équation (2) on tire

$$\overset{n}{\Pi}_p f_p = f_0 \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_p$$

et

$$\overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_p = \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_{n-p}\,,$$

on déduit de l'équation (1), non seulement

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P_{x+\frac{2p}{n}\tau}\,,$$

mais encore

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} P_{x+\frac{2(n-p)}{n}\tau}\,,$$

ou, suivant la formule (3),

$$\varphi_x = P_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} \left\{ -P_{x-\frac{2p}{n}\tau} \right\}.$$

Il viendra par suite

$$\varphi^2{}_x = P^2{}_x \prod_{p=1}^{p=n} \left\{ -P_{x+\frac{2p}{n}\tau}\, P_{x-\frac{2p}{n}\tau} \right\},$$

ou, en vertu de la formule (19), §. III.

$$(5) \qquad \varphi^2{}_x = P^2{}_x \prod_{p=1}^{p=n} P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau} \frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}.$$

La fonction $\varphi^2{}_x$ représentera donc une fonction fractionnaire par rapport à $P^2{}_x$, dont le numerateur sera du degré n et le dénominateur du degré $n-1$. On pourra dire autant de l'expression

$$1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_y},$$

dont le dénominateur sera le même que celui de $\varphi^2{}_x$; et, comme cette expression s'évanouit évidemment pour $x=y$, il en sera de même pour $x=y+\dfrac{2p}{n}\tau$, en vertu de la relation (4); de sorte qu'on aura

$$(6) \qquad 1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_y} = \prod_p^n \frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

d'où

$$\frac{1-\dfrac{\varphi_x{}^2}{\varphi_y{}^2}}{1-\dfrac{\varphi_x{}^2}{\varphi_z{}^2}} = \prod_p^n \frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

puis

$$\prod_q^n \frac{1-\dfrac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{y+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\dfrac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{z+\frac{2q}{n}\varrho}}} = \prod_q^n \prod_p^n \frac{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2p}{n}\varrho}}}{1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{z+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}}},$$

ou, suivant la formule (20), §. V.

$$(7) \qquad \frac{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{ny}}}{1-\frac{P^2_{nx}}{P^2_{nz}}}=\Pi_q^n \frac{1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\frac{2q}{n}\varrho}}}{1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{z+\frac{2q}{n}\varrho}}}.$$

Voici la formule par laquelle l'expression dans le premier membre sera réduite à une fonction fractionnaire de φ^2_x du degré n, φ^2_x étant elle-même une fonction fractionnaire de P^2_x du degré n. Il sera parsuite intéressant d'entrer en détail sur la nature de la fonction φ_x.

En différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (5) on prouvera, que $\left\{\frac{\partial_x\varphi_x}{\varphi_x}\right\}^2$ représentera une fonction fractionnaire par rapport à P^2_x, dont on déterminera les racines à l'aide de l'équation (6), en divisant les deux membres par $y-x$, et en posant $y=x$. Toutefois il sera à preférer de parvenir à l'expression cherchée de $\partial_x\varphi_x$ par une méthode directe, surtout, puisqu'elle exige la connaissance de quelques formules remarquables, que nous allons établir.

D'abord on a

$$(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)=P^2_{x+y}P^2_{x-y}-P^2_y(P^2_{x+y}+P^2_{x-y})+P^4_y;$$

et, comme des formules (1), (3) du §. V. on deduit

$$P^2_{x+y}+P^2_{x-y}=2\,\frac{P^2_xQ^2_yR^2_y+P^2_yQ^2_xR^2_x}{(1-c^2P^2_xP^2_y)^2},$$

et des formules (18) du §. III.

$$P^2_{x+y}P^2_{x-y}=\frac{(P^2_x-P^2_y)^2}{(1-c^2P^2_xP^2_y)^2},$$

il viendra

$$(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)$$
$$=\frac{1}{(1-c^2P^2_xP^2_y)^2}\{(P^2_x-P^2_y)^2-2P^2_y(P^2_xQ^2_yR^2_y+P^2_yQ^2_xR^2_x)$$
$$+P^4_y(1-c^2P^2_xP^2_y)^2\};$$

puis, ayant égard à l'equation

$$Q^2_xR^2_x=1-(1+c^2)P^2_x+c^2P^4_x,$$

il s'en suivra

$$
\begin{aligned}
&(1-c^2P^2{}_xP^2{}_y)^2(P^2{}_{x+y}-P^2{}_y)(P^2{}_{x-y}-P^2{}_y)\\
=\,&P^4{}_y-2P^2{}_yP^2{}_x+P^4{}_x\\
&\quad -2P_y{}^2Q_y{}^2R_y{}^2P_x{}^2\\
&\quad -2P^4{}_y+2(1+c^2)P^4{}_yP^2{}_x-2c^2P^4{}_yP^4{}_x\\
&\quad +P^4{}_y-2c^2P^6{}_yP^2{}_x+c^4P^8{}_yP^4{}_x\\
=\,&-2P^2{}_xP^2{}_y\{Q^2{}_yR^2{}_y+1-(1+c^2)P^2{}_y+c^2P^4{}_y\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +P^4{}_x\{1-2c^2P^4{}_y+c^4P^8{}_y\}\\
=\,&-4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y+P^4{}_x(1-c^2P^4{}_y)^2\\
=\,&-4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\left\{1-\left(\frac{1-c^2P^4{}_y}{2P_yQ_yR_y}\right)^2P^2{}_x\right\};
\end{aligned}
$$

d'où, en vertu des formules (6) et (14), §. V.

$$
(8)\qquad \left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\varrho}}\right)(P^2{}_{x+y}-P^2{}_y)(P^2{}_{x-y}-P^2{}_y)
=-4P^2{}_xP^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{2y}}\right).
$$

Ensuite on déduit des formules (1) et (3) du §. V.

$$
P^2{}_{x+y}-P^2{}_{x-y}=4\frac{P_xP_yQ_xQ_yR_xR_y}{(1-c^2P^2{}_xP^2{}_y)^2},
$$

d'où

$$
P^2{}_{x+2y}-P^2{}_x=4P_yQ_yR_y\frac{P_{x+y}Q_{x+y}R_{x+y}}{(1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y)^2},
$$

$$
P^2{}_{x-2y}-P^2{}_x=-4P_yQ_yR_y\frac{P_{x-y}Q_{x-y}R_{x-y}}{(1-c^2P^2{}_{x-y}P^2{}_y)^2},
$$

et par suite

$$
\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{x-2y}}\right)
$$

$$
=-16P^2{}_yQ^2{}_yR^2{}_y\frac{P_{x+y}P_{x-y}Q_{x+y}Q_{x-y}R_{x+y}R_{x-y}}{P^2{}_{x+2y}P^2{}_{x-2y}(1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y)^2(1-c^2P^2{}_{x-y}P^2{}_y)^2}.
$$

Mais de l'équation

$$
P_{x+y}P_{x-y}=\frac{P^2{}_x-P^2{}_y}{1-c^2P^2{}_xP^2{}_y}
$$

on tire

$$
P_{x+2y}P_x=\frac{P^2{}_{x+y}-P^2{}_y}{1-c^2P^2{}_{x+y}P^2{}_y},
$$

$$P_{x-2y}P_x = \frac{P^2_{x-y}-P^2_y}{1-c^2P^2_{x-y}P^2_y},$$

puis

$$P_{x+2y}P_{x-2y}(1-c^2P^2_{x+y}P^2_y)(1-c^2P^2_{x-y}P^2_y)$$
$$=\frac{(P^2_{x+y}-P^2_y)(P^2_{x-y}-P^2_y)}{P^2_x},$$

ce qui changera l'équation précédente en

$$\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right)$$
$$=-16P^4_xP^2_yQ^2_yR^2_y\frac{P_{x+y}P_{x-y}Q_{x+y}Q_{x-y}R_{x+y}R_{x-y}}{(P^2_{x+y}-P^2_{y}{}^2)^2(P^2_{x-y}-P^2_y)^2}.$$

Au moyen de la formule (8) on en déduit

$$\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right)$$
$$=-\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\varrho}}\right)^4\frac{P_{x+y}P_{x-y}}{P^2_y}\,\frac{Q_{x+y}Q_{x-y}}{Q^2_y}\,\frac{R_{x+y}R_{x-y}}{R^2_y},$$

ou, suivant les formules (19) du §. III.,

$$(9)\quad \begin{cases}\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{2y}}\right)^2\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{x-2y}}\right)\\ =\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_y}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\varrho}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\sigma}}\right)\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{y+\tau}}\right).\end{cases}$$

Cette formule conduit à une semblable pour la fonction φx. En effet, comme on a $P^2_x=P^2_{-x}$, et parsuite, en vertu de l'équation (5), $\varphi^2x=\varphi^2{-x}$, on déduit de l'équation (6), non seulement

$$1-\frac{\varphi^2x}{\varphi^2{x+2y}}=\overset{n}{\Pi}_p\,\frac{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{x+2y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

mais encore

$$1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2(x-2y)}=\overset{n}{\Pi}_p\frac{1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(x-2y-\frac{2p}{n}\tau\right)}}{1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(\varrho+\frac{2p}{n}\tau\right)}}.$$

Si donc, pour abréger, on pose

$$(10)\qquad \Phi=\left(1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2 2y}\right)\left(1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2(x+2y)}\right)\left(1-\frac{\varphi^2 x}{\varphi^2(x-2y)}\right),$$

il viendra

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\frac{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(2y+\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)^2\left(1-\dfrac{P_x^2}{P^2\left(x+2y+\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(x-2y-\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(\varrho+\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)^4},$$

ou suivant la formule (9),

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\frac{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P_2\left(y+\varrho+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\sigma+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\tau+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(\varrho+\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)^4}.$$

Puis, ayant égard à l'équation (11), §. III., savoir

$$\sigma=\varrho+\tau,$$

on aura

$$P\left(y+\tau+\frac{p}{n}\tau\right)=P\left(y+\frac{n+p}{n}\tau\right),\quad P\left(y+\sigma+\frac{p}{n}\tau\right)=P\left(y+\varrho+\frac{n+p}{n}\tau\right);$$

ce qui change la précédente en

$$\Phi=\overset{n}{\Pi}_p\frac{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\frac{n+p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\varrho+\frac{p}{n}\tau\right)}\right)\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(y+\varrho+\frac{n+p}{n}\tau\right)}\right)}{\left(1-\dfrac{P^2 x}{P^2\left(\varrho+\frac{2p}{n}\tau\right)}\right)^4}.$$

Mais on a, en général,

$$\overset{n}{\Pi}_{\varrho} f_p f_{n+p} = f_0 f_1 f_2 \cdots f_n f_{n+1} \cdots f_{2n-1} = \overset{n}{\Pi}_p f_{2p} f_{2p+1}:$$

donc on pourra substituer à la précedente

$$\Phi = \overset{n}{\Pi}_p \frac{\left(1-\frac{p^2_x}{p^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}\right)\left(1-\frac{p^2_x}{p^2_{y+\frac{\tau}{n}+\frac{2p}{n}\tau}}\right)\left(1-\frac{p^2_x}{p^2_{y+\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)\left(1-\frac{p^2_x}{p^2_{y+\varrho+\frac{\tau}{n}+\frac{2p}{n}\tau}}\right)}{\left(1-\frac{p^2_x}{p^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^4},$$

ou enfin, suivant les équations (6) et (18),

$$(11)\begin{cases}\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{2y}}\right)^2\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{x+2y}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{x-2y}}\right) \\ =\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_y}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\frac{\tau}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\varrho}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\varrho+\frac{\tau}{n}}}\right).\end{cases}$$

Cette formule étant établie, il ne sera pas difficile de trouver l'expression cherchée de $\partial_x \varphi_x$. Pour y parvenir il suffira de la mettre sous la forme

$$\left(\frac{\varphi^2_{2y}-\varphi^2_x}{\varphi_{x+2y}\,\varphi_{x-2y}}\right)^2\left(\frac{\varphi^2_{x+2y}-\varphi^2_x}{2y}\right)\left(\frac{\varphi^2_{x-2y}-\varphi^2_x}{-2y}\right)$$

$$=-\left(\frac{\varphi_{2y}}{2y}\right)^2\left(\frac{\varphi_{2y}}{\varphi_y}\right)^2(\varphi^2_y-\varphi^2_x)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\frac{\tau}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\varrho}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{y+\varrho+\frac{\tau}{n}}}\right),$$

et de poser $y=\varepsilon=0$. En effet, comme on a

$$\frac{\varphi^2_{x+2\varepsilon}-\varphi^2_x}{2\varepsilon}=\frac{\varphi^2_{x-2\varepsilon}-\varphi^2_x}{-2\varepsilon}=\partial_x\varphi^2_x=2\varphi_x\partial_x\varphi_x,$$

on touvera

$$4\varphi^2_x(\partial_x\varphi_x)^2=\left(\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{\varphi\varepsilon}\right)^2\varphi^2_x\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{\frac{\tau}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{\varrho}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2_x}{\varphi^2_{\varrho+\frac{\tau}{n}}}\right);$$

puis, en posant

$$(12)\qquad H=\frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où aussi

$$H=\frac{\varphi_{2\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

et observant qu'il suit de l'équation (1)

$$\frac{1}{\varphi_{\varrho}}=0,$$

à cause de

$$\frac{1}{P_{\varrho}}=0,$$

la précédente se réduira à

$$(\partial_x\varphi_x)^2=H^2\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\frac{\tau}{n}}}\right)\left(1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\varrho+\frac{\tau}{n}}}\right).$$

Maintenant soient

$$v'^2=1-\frac{\varphi_x{}^2}{\varphi^2{}_{\frac{\tau}{n}}},\quad w'^2=1-\frac{\varphi^2{}_x}{\varphi^2{}_{\varrho+\frac{\tau}{n}}},\tag{13}$$

et fixons la détermination de v', w' en ajoutant, que v' et w' se réduisent à 1 pour $x=0$, ce qui donne $\varphi_x=0$; alors, en observant, qu'on tire de l'quation (12)

$$H=\partial_\varepsilon\varphi_\varepsilon,$$

on aura, non seulement

$$(\partial_x\varphi_x{}^2)=H^2v'^2w'^2,$$

mais encore

$$\partial_x\varphi_x=Hv'w'.\tag{14}$$

Soient de plus

$$K=\varphi_{\frac{\tau}{n}},\quad k=\frac{\varphi_{\frac{\tau}{n}}}{\varphi_{\varrho+\frac{\tau}{n}}},\tag{15}$$

d'où

$$\varphi_{\varrho+\frac{\tau}{n}}=\frac{K}{k};$$

les équations (13) se réduiront à

$$v^2 = 1 - \frac{\varphi^2_x}{K^2}, \quad w^2 = 1 - k^2\frac{\varphi^2_x}{K^2};$$

et en faisant

$$(16) \qquad u' = \frac{\varphi_x}{K},$$

on aura

$$(17) \qquad v'^2 = 1 - u'^2, \quad w'^2 = 1 - k^2 u'^2,$$

tandis que l'équation (14) se changera en

$$\partial_x u' = \frac{H}{K} v' w'.$$

Si ensuite on désigne par ω une fonction de x determinée par l'équation

$$\omega = \frac{H}{K} x,$$

ou par

$$(18) \qquad \omega = \theta x.$$

ayant fait

$$(19) \qquad \theta = \frac{H}{K},$$

on obtiendra

$$\partial_\omega u' = v' w'.$$

En combinant celle-ci aux équations (17) on aura par conséquent

$$\partial_\omega u' = v'w', \ \partial_\omega v' = -w'u', \ \partial_\omega w' = -k^2 u'v',$$

tandis que u', v', w' sont liées à la condition de devenir 0, 1, 1 pour $x=0$, ou, ce qui revient au même, pour $\omega = 0$. D'après la définition posée pour les fonctions circulaires du second ordre on aura donc

$$u' = P_{\omega,k}, \ v' = Q_{\omega,k}, \ w' = R_{\omega,k},$$

ou, suivant l'équation (18):

$$u' = P_{\theta x,k}, \quad v' = Q_{\theta x,k}, \quad w' = R_{\theta x,k}.$$

En vertu de l'équation (16) on a par suite

$$(20) \qquad \varphi_x = K P_{\theta x,k};$$

et on voit que la fonction fractionnaire par rapport à $P^2{}_x$, désignée par φ_x et introduite dans le commencement de ce paragraphe, sera elle-même proportionelle à une fonction circulaire du second ordre.

En eliminant φ_x des équations (1), (6), (7), (12) et (15), à l'aide de la précédente, on trouvera

$$P_{\theta x,k}=\frac{1}{K}\overset{n}{\Pi_p}P_{x+\frac{2p}{n}\tau}, \tag{21}$$

$$1-\frac{P^2{}_{\theta x,k}}{P^2{}_{\theta y,k}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}, \tag{22}$$

$$\frac{1-\frac{P^2{}_{nx}}{P^2{}_{ny}}}{1-\frac{P^2{}_{ny}}{P^2{}_{nz}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\frac{P^2{}_{\theta x,k}}{P^2{}_{\theta(y+\frac{2p}{n}\varrho),k}}}{1-\frac{P^2{}_{\theta x,k}}{P^2{}_{\theta(z+\frac{2p}{n}\varrho),k}}}, \tag{23}$$

$$H=\frac{P_\varepsilon}{\varepsilon}\prod_{p=1}^{p=n}P_{\frac{2p}{n}\tau}$$

$$K=\overset{n}{\Pi_p}P_{\frac{2p+1}{n}\tau}, \tag{24}$$

$$k=\overset{n}{\Pi_p}\frac{P_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{P_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}.$$

Puis, comme on a

$$\frac{P_\varepsilon}{\varepsilon}=\partial_\varepsilon P_\varepsilon=Q_0R_0=1,$$

et

$$P_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}=\frac{1}{cP_{\frac{2p+1}{n}\tau}},$$

il viendra

$$H=\prod_{p=1}^{p=n}P_{\frac{2p}{n}\tau},$$

$$k=\overset{n}{\Pi_p}cP^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}=c^n\overset{n}{\Pi_p}P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}=c^nK^2:$$

donc, après avoir déterminé K et H par les équations (24) et (25), on trouvera k et θ, eu égard à l'équation (19), par les suivantes

$$(26) \qquad k = c^n K^2,\ \theta = \frac{H}{K}.$$

Il est bon d'observer que, la valeur de $P_{\frac{2p+1}{n}\tau}$ étant comprise entre 0 et 1, K sera inférieur à 1. On aura par suite $k < c^n$; et on voit que plus n sera grand plus k sera au dessous de c.

Remarquons qu'on tire de la formule (21)

$$P_{\theta\frac{\tau}{n},k} = \frac{1}{K} \overset{n}{\Pi_p} P_{\frac{2p+1}{n}\tau},$$

$$P_{\theta(\varrho+\frac{\tau}{n}),k} = \frac{1}{K} \overset{n}{\Pi_p} P_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau} = \frac{1}{c^n K} \overset{n}{\Pi_p} \frac{1}{P_{\frac{2p+1}{n}\tau}},$$

ou, selon les équations (24) et (26),

$$(27) \qquad P_{\theta\frac{\tau}{n},k} = 1,\ P_{\theta(\varrho+\frac{\tau}{n}),k} = \frac{1}{k}.$$

Si donc on fait successivement

$$y = \varepsilon = 0,\ y = \frac{\tau}{n},\quad y = \varrho + \frac{\tau}{n}$$

dans la formule (22), et qu'on pose, pour abréger,

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}^2{}_n &= \theta^2 P^2{}_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} \left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}\right), \\ \mathfrak{B}^2{}_n &= \overset{n}{\Pi_p} \left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right), \\ \mathfrak{C}^2{}_n &= \overset{n}{\Pi_p} \left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right) = \overset{n}{\Pi_p} \left(1 - c^2 P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau} P^2{}_x\right), \\ \mathfrak{D}^2{}_n &= \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} \left(1 - \frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right) = \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} \left(1 - c^2 P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau} P^2{}_x\right), \end{aligned} \right.$$

on trouvera, en observant que

$$P_\varepsilon=\varepsilon,\ P_{\theta\varepsilon}=\theta\varepsilon,\ \frac{1}{P_\varrho}=0.$$

$$P^2_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{A}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},\ Q^2_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{B}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},\ R^2_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{C}^2_n}{\mathfrak{D}^2_n},$$

ou bien

$$(29)\qquad P_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{D}_n},\ Q_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{D}_n},\ R_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{C}_n}{\mathfrak{D}_n},$$

en supposant que $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ se reduissent à $\theta\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x=\varepsilon=0$.

Par ces formules on passe du module c à un module k inferieur à c. Il restera à reduire les seconds membres des équations (28) à des formes quarrées; mais pour cela il faut distinguer les cas où n sera pair et impair. C'est ce que nous ferons dans un autre mémoire.

Remarquons encore, qu'en attribuant à θx des valeurs positives, et en faisant varier θx depuis zéro par degrés insensibles, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive, en vertu des principes établis dans le §. II., et elle ne s'evanouira que lorsque $\theta x=\tau_k$. De l'autre coté, il suit des formules (28) et (29), que la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive en faisant varier x depuis 0 jusqu'à $\frac{\tau}{n}$, valeur de x pour laquelle $Q_{\theta x,k}$ s'evanouit de même. Les deux limites τ_k et $\theta\frac{\tau}{n}$ seront donc les mêmes, et on aura

$$\theta\frac{\tau}{n}=\tau_k,$$

ou

$$(30)\qquad \theta\tau_c=n\tau_k.$$

Pareillement, en attribuant à θx des valeurs imaginaires, et en faisant varier θx depuis 0 par degrés insensibles, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive et ne deviendra égale à ∞ que lorsque $\theta_x=\varrho_k$. De l'autre coté, il suit des formules (28) et (29), qu'en faisant passer x par l'imaginaire depuis 0 jusqu'à ϱ, la valeur de $Q_{\theta x,k}$ restera positive et n'atteindra l'infini que pour la valeur ϱ de x. Les deux limites ϱ_k et $\theta\varrho$ seront donc les mêmes, et on aura

$$\theta\varrho=\varrho_k,$$

ou

$$(31)\qquad \theta\varrho_c=\varrho_k.$$

Puis, en observant que $\sigma = \tau + \varrho$, on tire des équations (30) et (31)

$$(32) \qquad \theta\sigma_c = \varrho_k + n\tau_k, \qquad \sigma_k = \theta\left(\varrho_c + \frac{\tau_c}{n}\right),$$

et encore, par l'élimination de θ,

$$(33) \qquad \frac{\tau_c}{\varrho_c} = n\frac{\tau_k}{\varrho_k}, \quad \frac{\tau_c}{\tau_k} = n\frac{\varrho_c}{\varrho_k}.$$

Enfin, comme on a, suivant l'équation (5), §. II.,

$$\varrho_c = i\tau_b,$$

en déterminant b par les équations

$$(34) \qquad b = \overline{\omega}_c, \quad \overline{\omega}_u^2 = 1 - u^2, \quad \overline{\omega}_0 = 1,$$

on aura pareillement

$$\varrho_k = i\tau_h,$$

en déterminant h par l'équation

$$(35) \qquad h = \overline{\omega}_k:$$

donc il sera permis de substituer aux équations (31) et (33)

$$(36) \qquad \theta\tau_b = \tau_h, \quad \frac{\tau_c}{\tau_b} = n\frac{\tau_k}{\tau_h}, \quad \frac{\tau_c}{\tau_k} = n\frac{\tau_b}{\tau_h}.$$

XXXIV.

Auflösung der geometrischen Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis so schneidet, dass die beiden gemeinschaftlichen Sehnen einer gegebenen Geraden gleich werden.

Von

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

Es seien (Taf. IX. Fig. 1.) A und B die beiden gegebenen Punkte, $DEFG$ der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt C, und m die gegebene gerade Linie, welcher die gemeinschaftliche Sehne gleich werden soll.

Beschreibt man durch die gegebenen Punkte A und B einen beliebigen Kreis, welcher den gegebenen Kreis (C) in zwei Punkten D und E schneide, verbindet A mit B und D mit E, und verlängert AB und DE bis zu ihrem Durchschnittspunkt P, so ist nach einem bekannten Satze:

$$PA \times PB = PD \times PE \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Zieht man nun von P eine beliebige Sekante PN durch den gegebenen Kreis, so ist ebenso

$$PN \times PM = PD \times PE . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$PA \times PB = PN \times PM . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Punkte M und N, in welchen die Sekante den gegebenen Kreis schneidet, liegen folglich mit den gegebenen Punkten A und B jedesmal auf einer Kreislinie.

Legt man nun eine Sehne $FG=m$ in den gegebenen Kreis, beschreibt ferner mit dem Abstande CH derselben vom Mittelpunkt einen Hülfskreis und zieht endlich an diesen Hülfskreis vom Punkte P aus die Tangenten PK und PK', welche den gegebenen Kreis in den Punkten M und N, resp. in den Punkten M' und N' schneiden, so sind $ABMN$ und $ABM'N'$ zwei Kreise (und zwar die einzigen) von der verlangten Eigenschaft, und die Durchschnittspunkte O und O' der in der Mitte von AB und MN, resp. von AB und $M'N'$, errichteten Senkrechten ihre Mittelpunkte.

Denn nach (3) liegen die Punkte A, B, M, N, so wie die Punkte A, B, M', N', je auf der Peripherie eines Kreises; auch ist die diesen Kreisen mit dem gegebenen Kreise gemeinschaftliche Sehne MN, resp. $M'N'$, wegen gleichen Abstandes vom Mittelpunkte, der Sehne FG, folglich der gegebenen Geraden m gleich.

Ist die Gerade, welcher die gemeinschaftliche Sehne gleich sein soll, dem Durchmesser des gegebenen Kreises selbst gleich, so ist ihr Mittelpunktsabstand $CH=0$, und statt des Hülfskreises und der beiden Tangenten an denselben hat man alsdann die Eine Sekante PS durch den Mittelpunkt C, und also auch nur den Einen Kreis $ABRS$, welcher den gegebenen Kreis (C) in R und S so schneidet, dass diese Durchschnittspunkte in demselben sich diametral gegenüberstehen. — Hiermit ist eine einfache Auflösung einer in dem Aufsatze Nr. VIII. Theil XV. behandelten Aufgabe gegeben, nämlich der von dem Herrn Herausgeber des Archivs gestellten Aufgabe:

„Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers dieses gegebenen Kreises schneidet."

Wird die gegebene Gerade Null, so fällt obiger Hülfskreis mit dem gegebenen Kreise (C) zusammen, an welchen man nun die Tangenten PT und PT' zu ziehen hat, um als verlangten Kreis einen der Kreise ABT oder ABT' zu erhalten. — Dies ist aber die bekannte Aufgabe:

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis von Aussen berührt und durch zwei ausserhalb desselben gegebene Punkte geht."

XXXV.

Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
zu Dresden.

Für jedes zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegende x gelten bekanntlich die Gleichungen

$$\sec x = B_0 + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4}x^4 + \ldots,$$

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2}x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3$$
$$+ \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5 + \ldots;$$

worin B_0, B_2, B_4, B_6 etc. die sogenannten Sekantenkoeffizienten, B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Setzen wir zu grösserer Gleichförmigkeit der Bezeichnung

$$1)\qquad B_{2n} = T_{2n},\quad \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} = T_{2n-1}$$

und nennen entsprechend T_1, T_3, T_5 etc. die Tangentenkoeffizienten, so ist jetzt für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$

$$2)\qquad \sec x = T_0 + \frac{T_2}{1.2}x^2 + \frac{T_4}{1.2.3.4}x^4 + \ldots,$$

$$3)\qquad \tan x = \frac{T_1}{1}x + \frac{T_3}{1.2.3}x^3 + \frac{T_5}{1.2.3.4.5}x^5 + \ldots.$$

Die independente Bestimmung der Koeffizienten T_0, T_1, T_2, T_3 etc. verursacht bekanntlich einige Schwierigkeiten, die man nur durch Einführung imaginärer Grössen umgehen zu können glaubte, wobei das Problem zuletzt auf die Entwickelung der höheren Differentialquotienten von

$$\frac{z}{e^z - 1}$$

hinauskam (m. s. u. A. den Artikel Bernoullische Zahlen in den Supplementen zum mathematischen Wörterbuche.). Es lässt sich aber die Sache viel einfacher ohne imaginäre Grössen abmachen und man gewinnt dabei Formeln, welche sich vor den von Laplace, Scherk und mir selbst (in meiner Differenzialrechnung) mitgetheilten durch grössere Einfachheit auszeichnen.

I. Nach bekannten Lehren ist der Koeffizient T_{2n} nichts Anderes als der spezielle Werth, welchen der $(2n)$te Differenzialquotient von $\sec x$ für $x=0$ erhält, also nach Cauchy's Bezeichnung

$$4)\qquad T_{2n} = (D^{2n}\sec x)_{(0)}.$$

Um diesen zu entwickeln bemerken wir, dass für $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ die Gleichungen

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 x + \ldots.$$

statt finden, wobei wir die Reihe in zwei Theile zerlegen, nämlich:

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\sin^{2n} x$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\sin^{2n+2} x + \ldots\ldots$$

Denkt man sich im zweiten Theile für $\sin x$ die bekannte Reihe $x - \frac{1}{6}x^3 +$ etc. gesetzt und die Potenzirungen ausgeführt, so

würde eine Reihe zum Vorschein kommen, welche mit der $(2n+2)$ten Potenz von x anfinge und überhaupt von der Form wäre

$$K_0x^{2n+2}+K_2x^{2n+4}+K_4x^{2n+6}+\ldots\ldots,$$

wobei es auf die Werthe von K_0, K_2, etc. nicht weiter ankommt. Wenn die nunmehrige Gleichung

$$\sec x=1+\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1.3}{2.4}\sin^4x+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\sin^{2n}x$$
$$+K_0x^{2n+2}+K_2x^{2n+4}+K_4x^{2n+6}+\ldots$$

$(2n)$mal differenzirt und nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt wird, so verschwindet der zweite Theil, und da links T_{2n} zum Vorschein kommt, so ist jetzt

$$5)\quad T_{2n}=\frac{1}{2}(D^{2n}\sin^2x)_{(0)}+\frac{1.3}{2.4}(D^{2n}\sin^4x)_{(0)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(D^{2n}\sin^{2n}x)_{(0)}.$$

Zur Ausführung der hier angedeuteten Differenziationen dient die bekannte für jedes ganze positive k geltende Formel

$$6)\quad \sin^{2k}x=\frac{1}{2^{2k-1}}\left[\frac{1}{2}(2k)_k-(2k)_{k-1}\cos 2x+(2k)_{k-2}\cos 4x-\ldots\right]$$

in welcher die bekannte Bezeichnungsweise der Binomialkoeffizienten

$$m_i=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{i-1})}{1.2.3\ldots i}$$

angewendet worden ist. Man hat nun bekanntlich

$$D^{2n}\cos\mu x=(-1)^n\mu^{2n}\cos\mu x,$$

folglich

$$(D^{2n}\cos\mu x)_{(0)}=(-1)^n\mu^{2n},$$

mithin durch $(2n)$malige Differenziation der Gleichung 6) für $x=0$

$$(D^{2n}\sin^{2k}x)_{(0)}$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^{2k-1}}[-(2k)_{k-1}2^{2n}+(2k)_{k-2}4^{2n}-(2k)_{k-3}6^{2n}+\ldots].$$

Wendet man diess auf die Gleichung 5) für $k=1, 2, 3, \ldots n$ an, so ist durch nachherige Multiplication mit $(-1)^{n+1}$

$$7)\quad (-1)^{n+1}T_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0.2^{2n}]$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}[4_1.2^{2n}-4_0.4^{2n}]$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}[6_2.2^{2n}-6_1.4^{2n}+6_0.6^{2n}]$$
$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}[(2n)_{n-1}.2^{2n}-(2n)_{n-2}.4^{2n}+-.\pm(2n)_0(2n)^{2n}].$$

Für $n=0$ darf man diese Formel nicht benutzen, weil ihre Herleitung voraussetzt, dass wenigstens eine Differenziation gemacht worden ist. Aus Nr. 2) folgt aber für $x=0$ unmittelbar $T_0=1$, und nun hat man weiter T_2, T_4, T_6 etc. nach der obigen Formel; z. B. für $n=3$

$$T_6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2^6]$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}[4.2^6-4^6]$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}[15.2^6-6.4^6+6^6]$$
$$=16-180+225=61.$$

II. Eine ganz ähnliche Rechnung dient zur Bestimmung von

$$8)\qquad T_{2n-1}=(D^{2n-1}\tan x)_{(0)}.$$

Man hat nämlich zunächst für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$
$$=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4}\sin^5 x+\,.....,$$

wobei wiederum die Reihe in zwei Theile zerlegt werden möge, nämlich

$$\tan x=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4}\sin^5 x+...+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\sin^{2n-1}x$$
$$+\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\sin^{2n+1}x+....$$

Denkt man sich im zweiten Theile für $\sin x$ seinen Werth gesetzt, so erhält man eine Reihe, welche mit der $(2n+1)$ten Potenz von x anfängt, und daher ist auch

$$\tan x = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\sin^{2n-1} x$$
$$+ K_1 x^{2n+1} + K_3 x^{2n+3} + K_5 x^{2n+5} + \ldots,$$

wobei es auf die Werthe der mit K bezeichneten Koeffizienten nicht weiter ankommt. Durch $(2n-1)$malige Differenziation und Nullifizirung von x wird jetzt, da der zweite Theil verschwindet,

$$9)\; T_{2n-1} = (D^{2n-1}\sin x)_{(0)} + \frac{1}{2}(D^{2n-1}\sin^3 x)_{(0)} + \frac{1.3}{2.4}(D^{2n-1}\sin^5 x)_{(0)}$$
$$+ \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}(D^{2n-1}\sin^{2n-1} x)_{(0)}.$$

Andererseits ist nach einer bekannten Formel

$$\sin^{2k-1} x = \frac{1}{2^{2k-2}}[(2k-1)_{k-1}\sin x - (2k-1)_{k-3}\sin 3x + \ldots],$$

woraus man, unter Rücksicht auf die Gleichungen

$$D^{2n-1}\sin\mu x = (-1)^{n+1}\mu^{2n-1}\cos\mu x,$$
$$(D^{2n-1}\sin\mu x)_{(0)} = (-1)^{n+1}\mu^{2n-1},$$

leicht die folgende ableitet:

$$(D^{2n-1}\sin^{2k-1} x)_{(0)}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2k-2}}[(2k-1)_{k-1}.1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3}.3^{2n-1} + (2k-1)_{k-5}.5^{2n-1} - \ldots].$$

Demzufolge geht die Formel 9) in die nachstehende über:

$$10)\quad (-1)^{n+1} T_{2n-1} = 1_0.1^{2n-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}[3_1.1^{2n-1} - 3_0.3^{2n-1}]$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^4}[5_2.1^{2n-1} - 5_1.3^{2n-1} + 5_0.5^{2n-1}]$$
$$+ \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}[(2n-1)_{n-1}.1^{2n-1} - (2n-1)_{n-3}.3^{2n-1}$$
$$+ \ldots \pm (2n-1)_0.(2n-1)^{2n-1}],$$

welche der unter Nro. 7) verzeichneten völlig analog gebildet ist; man erhält aus ihr für $p=1, 2, 3, 4$ etc.

$$T_1 = 1,\quad T_3 = 2,\quad T_5 = 16,\quad T_7 = 272, \ldots$$

Hieraus lassen sich auch rückwärts die Bernoullischen Zahlen ab leiten, wenn man der zweiten Gleichung in Nro. 1) die Form

$$B_{2n-1}=\frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}T_{2n-1}$$

giebt; so findet sich ohne Mühe:

$$B_1=\frac{2}{4.3}\cdot 1=\frac{1}{6},\quad B_3=\frac{4}{16.15}\cdot 2=\frac{1}{30},$$

$$B_5=\frac{6}{64.63}\cdot 16=\frac{1}{42},\quad B_7=\frac{8}{256.255}\cdot 272=\frac{1}{30}\text{ , etc.}$$

III. Um endlich eine Formel zu erhalten, welche T_{2n} und T_{2n-1} zugleich angiebt, bemerken wir, dass die Gleichung

$$\sec x+\tan x=\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)$$
$$=T_0+\frac{T_1}{1}x+\frac{T_2}{1.2}x^2+\frac{T_3}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

statt findet, und demnach für ein ganzes positives m

$$11)\qquad T_m=\left\{D^m\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)\right\}_{(0)}$$

sein muss. Man hat nun weiter für $x<\frac{1}{2}\pi$

$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$$
$$=\cos x+\sin x\cos x+\sin^2 x\cos x+\ldots.+\sin^m x\cos x$$
$$+\sin^{m+1}x\cos x+\sin^{m+2}x\cos x+\ldots..,$$

oder, wenn man in dem zweiten Theile der Reihe für $\sin x$ und $\cos x$ die gleichgeltenden Potenzenreihen setzt:

$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\cos x+\sin x\cos x+\sin^2 x\cos x+\ldots+\sin^m x\cos x$$
$$+H_{m+1}x^{m+1}+H_{m+2}x^{m+2}+\ldots.,$$

wobei es nicht auf die Werthe der mit H bezeichneten Koeffizienten ankommt. Hieraus ergiebt sich durch $m$malige Differenziation und nachher für $x=0$ wegen Nro. 11)

$$T_m=(D^m\cos x)_{(0)}+(D^m\sin x\cos x)_{(0)}+(D^m\sin^2 x\cos x)_{(0)}+\ldots.$$
$$\ldots..+(D^m\sin^m x\cos x)_{(0)}\,.$$

Man hat aber

$$D\sin^{k+1}x = (k+1)\sin^k x\cos x,$$

folglich durch $m$malige Differenziation

$$D^{m+1}\sin^{k+1}x = (k+1)D^m(\sin^k x\cos x)$$

oder umgekehrt

$$D^m(\sin^k x\cos x) = \frac{1}{k+1}D^{m+1}\sin^{k+1}x,$$

und mithin durch Anwendung auf das Frühere

$$12)\quad T_m = \frac{1}{1}(D^{m+1}\sin x)_{(0)} + \frac{1}{2}(D^{m+1}\sin^2 x)_{(0)} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{m+1}(D^{m+1}\sin^{m+1}x)_{(0)};$$

und hier lassen sich sämmtliche Differenzialquotienten der Sinuspotenzen auf dieselbe Weise wie früher entwickeln. Geht man auf die Unterscheidung gerader und ungerader m ein, so findet man für $m=2n$:

$$13)\quad (-1)^n T_{2n} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}[3_1.1^{2n+1} - 3_0.3^{2n+1}]$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}[5_2.1^{2n+1} - 5_1.3^{2n+1} + 5_0.5^{2n+1}]$$
$$+\ \dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n}}[(2n+1)_n.1^{2n+1} - (2n+1)_{n-1}.3^{2n+1}$$
$$+\dots\pm(2n+1)_0(2n+1)^{2n+1}];$$

und entsprechend für $m=2n-1$:

$$14)\quad (-1)^{n+1}T_{2n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0.2^{2n}]$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}[4_1.2^{2n} - 4_0.4^{2n}]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}[6_2.2^{2n} - 6_1.4^{2n} + 6_0.6^{2n}]$$
$$+\ \dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}[(2n)_{n-1}.2^{2n} - (2n)_{n-2}4^{2n} + \dots$$
$$\dots\pm(2n)_0.(2n)^{2n}].$$

Nach der zweiten von diesen Formeln ist z. B. für $n=3$:

$$T_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[2^6]$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}[4.2^6-4^6]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}[15.2^6-6.4^6+6^6]$$
$$=16-120+120=16.$$

Die letzten beiden Formeln für T_{2n} und T_{2n-1} scheinen die einfachsten zu sein, welche zur independenten Bestimmung überhaupt dienen können. Die wirkliche Berechnung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten wird man übrigens unter Anwendung rekurrirender Formeln jederzeit leichter haben als nach irgend einer independenten Formel; unter den zahlreichen rekursiven Beziehungen, welche man zu diesem Zwecke angeben kann, scheint die folgende

$$15)\qquad m_0T_m - m_2T_{m-2} + m_4T_{m-4} - m_6T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2},$$

welche gleichförmig für gerade und ungerade m gilt, die einfachste und wohl auch nicht bekannt zu sein. Formell ist noch die folgende von Interesse:

$$16)\quad 2T_{m+1} = m_0T_0T_m + m_1T_1T_{m-1} + m_2T_2T_{m-2} + \ldots,$$

in welcher einige Aehnlichkeit mit dem Binomialtheoreme liegt. Von beiden Rekursionsformeln ist übrigens der Beweis so leicht, dass ich ihn füglich übergehen kann.

XXXVI.

Ueber die sich unendlich vergrössernden und die sich unendlich verkleinernden Curven.

Von dem

Herrn Doctor J. G. H. Swellengrebel

zu Utrecht.

Ist uns der Grad n und die Form einer gewissen algebraischen Curve $f(x,y)=0$ völlig unbekannt, so ist uns auch unbekannt, welche die Form sei der aus der Primitiven durch $p$malige Vergrösserung oder Verkleinerung entstehenden Curve. Nur wissen wir, dass — wenn wir den Coordinaten-Ursprung als im Vergrösserungs-Centrum liegend uns denken, d. h. in demjenigen Punkte, wovon die Vergrösserung ausgeht, und der daher bei der Vergrösserung seinen Ort nicht wechselt — die resultirenden Curven respective durch die Gleichungen

$$f\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}\right)=0 \text{ und } f(px,\ py)=0$$

angedeutet werden. Anders dagegen verhält sich die Sache im Limitfall $p=\infty$, da alsdann nur ein gewisser Theil der Primitiven auf die Form der Resultirenden Einfluss hat, diese aber vom ganzen übrigen Theil der Primitiven unabhängig ist, so dass man, die Primitive $f(x,y)=0$ möge uns übrigens völlig unbekannt sein, doch schon die Form der resultirenden Curven

$$f(0x,\ 0y)=0 \text{ und } f(\infty x,\ \infty y)=0$$

vorhersagen kann.

Betrachten wir erstens die unendliche Verkleinerung: Es reducirt sich alsdann der ganze vom Coordinatenursprung endlich entfernte Theil der Primitiven beim Uebergang zur analogen Curve auf diesen Ursprungpunkt selbst, sodass nur noch die unendlich entfernten, d. h. die asymptotischen Zweige der Primitiven zu betrachten übrig bleiben. Wäre nun die Primitive $f(x,y)=0$ eine gewisse Gerade $ax+by+1=0$, so würde sich für die Curve $f(\infty x, \infty y)=0$ die Gerade $ax+by=0$, d. h. eine durch den Coordinaten-Ursprung gehende, der Primitiven parallele Gerade ergeben. Es wird daher auch allgemein, bei der unendlichen Verkleinerung einer beliebigen Primitive $f(x,y)=0$, jede ihrer Asymptoten in eine den Coordinaten-Ursprung in nämlicher Richtung durchgehende Gerade sich abändern. Da nun jede algebraische Curve eines gewissen Grades n im Allgemeinen n reelle oder imaginäre asymptotische Zweige hat, welche sich unendlich zu ihren Asymptoten annähern und bei der unendlichen Verkleinerung noch inniger mit diesen verschmelzen und daher mit diesen verwechselt werden dürfen, so ergiebt sich, dass die aus der Primitiven $f_n(x,y)=0$ entstehende Curve $f_n(\infty x, \infty y)=0$ im Allgemeinen eine neue Curve $n$ten Grades ist, welche jedoch die Specialität besitzt, dass sie aus einem durch den Coordinaten-Ursprung gehenden Strahlenbüschel von n, den Asymptoten der Primitiven parallelen, Geraden besteht.

Das nämliche ergiebt sich aus der Betrachtung, dass jede Curve $n$ten Grades (siehe Plücker in seiner Theorie der algebraischen Curven) betrachtet werden kann als

$$f_n(x,y)\equiv[(a_1x+b_1y+1)(a_2x+b_2y+1)\dots(a_nx+b_ny+1)]+\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

wo

$$a_1x+b_1y+1=0, \quad a_2x+b_2y+1=0 \text{ etc.}$$

die n reellen oder imaginären Asymptoten der $f_n(x,y)=0$ bedeuten. Durch $p$malige Verkleinerung erhalten wir die Curve

$$f_n(px,py)\equiv[a_1px+b_1py+1)\dots\dots(a_npx+b_npy+1)]+\underset{n-2}{F}(px,py)\equiv$$

$$\dots\equiv p^n\times[(a_1x+b_1y+\frac{1}{p})\dots(a_nx+b_ny+\frac{1}{p})]+p^{n-2}\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

d. h. die Curve

$$[(a_1x+b_1y+\frac{1}{p})\dots\dots(a_nx+b_ny+\frac{1}{p})]+\frac{1}{p^2}\underset{n-2}{F}(x,y)=0,$$

welche sich durch die Annahme $p=\infty$ auf die Curve

$$(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)\dots(a_nx+b_ny)=0,$$

d. h. auf den oben erwähnten Strahlenbüschel reducirt.

Wenden wir dieses an auf den speciellen Fall, dass die Primitive ein Kegelschnitt sei: In diesem Fall können wir, da alle Asymptoten einander in einem gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden, die unendliche Verkleinerung auch, wenn wir das Verkleinerungs-Centrum in diesen Durchschnittspunkt der Asymptoten verlegen, als ein unendliches Annähern der Curve zu ihren Asymptoten betrachten, d. h. wir können uns die Primitive

$$(x+cy)(x+dy)+e=0$$

mit der Analogen

$$(x+cy)(x+dy)=0$$

durch solch eine Verwandtschaft verbunden denken, welche aus der die Asymptoten zu ihren Situations-Axen habenden Affinität

$$x'+cy'=\frac{1}{p}(x+cy),$$

$$x'+dy'=\frac{1}{q}(x+dy)$$

im Limitfall $p=\infty$, $q=\infty$ hervorgeht. Man pflegt in den Lehrbüchern gemeiniglich nur einfach anzugeben, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

bei einem gewissen Zusammenhang zwischen den Coefficienten $ABCDEF$ sich auf ein System zweier Geraden reducirt, ohne dass man näher die Möglichkeit solch einer Formveränderung des Kegelschnitts anzeigte. Eine bessere Einsicht des Vorganges erhält man, dünkt mich, wenn man zugleich angibt, was denn eigentlich der Kegelschnitt in diesem Limitfall erleide, und wenn man ihn entweder als sich unendlich nach seinem Centrum zu verkleinernd oder aber unendlich seinen beiden Asymptoten als Situations-Axen einer affinen Transformation sich annähernd sich denkt,

Betrachten wir jetzt die unendliche Vergrösserung einer beliebigen algebraischen Curve $f_n(x,y)=0$. Bei dieser Veränderung hat nur der unendlich kleine, in der unmittelbaren Nähe des Vergrösserungs-Centrums liegende Theil der Primitiven auf die Natur der analogen Figur Einfluss, da der ganze übrige Theil der Primitiven beim Uebergang zur Analogen sich in's Unendliche verliert und daher, weil nur von algebraischen Curven die Rede war, nicht weiter berücksichtigt werden braucht, da sonst die

analoge Figur sich in unendlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprung um diesen winden und daher zu den **transcendenten** Curven gerechnet werden müsste. Es wird nun bei der Primitiven

$$f_n(x,y) \equiv [Ax^n + Bx^{n-1}y + ... + Cy^n] + [Dx^{n-1} + ...] + ...$$
$$.... + Fx + Gy + H = 0$$

im Allgemeinen $H \gtrless 0$ sein, d. h. es wird im Allgemeinen der Coordinaten-Ursprung und daher auch das Vergrösserungs-Centrum sich nicht auf der Curve, sondern irgendwo ausserhalb ihr befinden, sodass bei der unendlichen Vergrösserung im Allgemeinen die ganze Primitive $f(x,y)=0$ sich unendlich vom Coordinaten-Ursprung entfernt, und daher die Analoge $f(0x, 0y)=0$ im Allgemeinen eine Curve 0ten Grades wird, d. h. zur Gleichung $H=0$ sich reducirt. In speciellen Fällen jedoch kann es sich ereignen, dass in der Gleichung $f_n(x,y)=0$ der Coefficient H den Werth 0 hätte, so dass die Primitive das Vergrösserungs-Centrum durchstrich, und zwar in einer Richtung, deren Winkel mit der Richtung der Coordinaten-Axe $y=0$ durch arc.tg.$(-\frac{F}{G})$ angedeutet würde. Es wird alsdann der in der unmittelbaren Nähe des Vergrösserungs-Centrums liegende Theil der Primitiven, bei der unendlichen Vergrösserung sich, mit Beibehaltung ihrer Richtung, zu einer Geraden ausdehnen, sodass die analoge $f_n(0x, 0y)=0$ — wenn wir wiederum ihre unendlich entfernten Windungen ausser Betrachtung lassen — sich zu der Geraden $Fx+Gy=0$ oder allgemeiner zu der ihr parallelen Geraden $Fx+Gy+K=0$ reducirt. In noch specielleren Fällen kann es sich ereignen, dass die Primitive im Coordinaten-Ursprung einen Doppelpunkt oder überhaupt einen $q$fachen Punkt hätte. Es wird alsdann die Analoge $f_n(0x, 0y)=0$ eine Curve $q$ten Grades sein, und zwar eine aus q Geraden bestehende, welche den q, der Primitiven im Coordinaten-Ursprung zu ziehenden Tangenten respective parallel laufen.

Es ist aber wohl zu beachten, dass bisher immer nur von **algebraischen** Curven die Rede war, sodass unsere Behauptung, dass die unendliche Verkleinerung oder Vergrösserung einer beliebigen Curve $f_n(x,y)=0$ im Allgemeinen immer ein System von n oder q Geraden hervorbringt, nicht geradezu auf transcendente Curven übertragen werden darf, sondern bei diesen, statt eines Systemes von Geraden, bisweilen neue Curven hervortreten. Nehmen wir z. B. die **logarithmische Spirale** $\varphi = \lg.r$, und verkleinern oder vergrössern wir sie unendlichmal, so ergibt sich in beiden Fällen — nur soll im letzten Fall das Vergrösserungs-Centrum im Centrum der Spirale angenommen werden — eine neue Curve, welche, so wie die Primitive, einerseits sich mit unendlich vielen Windungen in's Unendliche erstreckt, andererseits unendliche Male um das Vergrösserungs-Centrum sich herumdreht und sich ihm immer mehr nähert. Da nämlich, bei unserer Lage des Vergrösserungs-Centrums, die unendliche

Verkleinerung oder Vergrösserung einer Primitiven $f(r,\varphi)=0$ respective durch das Gleichungen-Paar $\begin{matrix} r'=0\times r \\ \varphi'=\varphi \end{matrix}$ oder durch das Paar $\begin{matrix} r'=\infty\times r \\ \varphi'=\varphi \end{matrix}$ ausgedrückt wird, so ändert sich die Primitive $\varphi=\lg.r$ in die Curven

$$\varphi'=\varphi=\lg.r=\lg.(\infty\times r')=+\infty+\lg.r',$$

$$\varphi'=\varphi=\lg.r=\lg.(0\times r')=-\infty+\lg.r'.$$

In beiden Fällen ist daher die resultirende Curve eine neue logarithmische Spirale, welche aus der Primitiven als auf diese Weise entstanden gedacht werden kann, dass die ganze Primitive sich unendliche Male um den Coordinaten-Ursprung gedreht hätte, und welche mit der Primitiven nicht nur durch die Verwandtschaft der Aehnlichkeit, sondern auch — wegen der Bedingung $\varphi'=\varphi$ — durch diejenige der Aehnlichkeit mit ähnlicher Lage verbunden ist. Ob sie aber mit der Primitiven coincidire, hängt davon ab, ob jede ihrer Windungen nach Beendigung der unendlich vielen zur Vergrösserung oder Verkleinerung erforderlichen Umdrehungen auf eine der Windungen der Primitiven geräth oder aber sich zwischen zwei Windungen der Primitiven befindet; was, da die Anzahl ∞ dieser Umdrehungen unbestimmt ist, unbestimmt bleiben muss.



XXXVII.

Auflösung des Malfatti'schen Problems.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bau-Conducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Da ich die nachstehende Auflösung des Malfattischen Problems zu einer Zeit gefunden habe, wo mir von einer bereits veröffentlichten Lösung desselben noch Nichts bekannt war; so vermuthe ich, dass dieses Verfahren wesentlich von den schon vorhandenen Auflösungen verschieden und demnach die Publikation desselben gerechtfertigt sein wird.

Nach diesem Problem sollen in ein Dreieck ABC (Taf. IX. Fig. 2.) drei Kreise beschrieben werden, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks und die anderen beiden Kreise berührt.

Dass die Mittelpunkte E, F, G der gesuchten Kreise auf den Halbirungslinien AD, BD, CD der Winkel des Dreiecks liegen müssen, leuchtet ein. Zieht man EF und fällt von E und F die Perpendikel EJ, FK auf AB; so muss EJ der Radius des um E beschriebenen, FK der Radius des um F beschriebenen Kreises und EF muss die Summe dieser beiden Radien sein.

Nun seien zur Abkürzung

a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten BC, CA, AB des Dreiecks;

2α, 2β, 2γ die Winkel bei A, B, C;

p, q, r die Linien AD, BD, CD;

h die Länge der von D auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel DL, DM, DN, welche sämmtlich dem Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises gleich sind;

e, f, g die Länge von den Fusspunkten dieser Perpendikel nach den Spitzen A, B, C des Dreiecks, also die Längen

$$AM=AN, \quad BN=BL, \quad CL=CM;$$

x, y, z die gesuchten Halbmesser der um E, F, G zu beschreibenden Kreise.

Zieht man EH parallel zu AB; so hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke EFH

$$EH=\sqrt{EF^2-FH^2}=\sqrt{(EJ+FK)^2-(FK-EJ)^2}=2\sqrt{EJ.FK},$$

d. i. da man

$$EH=JK=AB-AJ-BK=c-\frac{x}{\operatorname{tang}\alpha}-\frac{y}{\operatorname{tang}\beta}$$

hat,

$$(1) \qquad c-x\cot\alpha-y\cot\beta=2\sqrt{xy},$$

und symmetrisch hat man

$$(2) \qquad b-z\cot\gamma-x\cot\alpha=2\sqrt{zx},$$

$$(3) \qquad a-y\cot\beta-z\cot\gamma=2\sqrt{yz}.$$

Dividirt man jede der drei Gleichungen (1), (2), (3) durch z, löst eine jede derselben, indem man $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{1}{z}$ wie drei Unbekannte behandelt, für $\frac{1}{z}$ auf, was sehr leicht ist, da jede Gleichung in Beziehung zu dieser Unbekannten vom ersten Grade ist, und schreibt zur Abkürzung

$$(4) \qquad X=\sqrt{\frac{x}{z}}, \quad Y=\sqrt{\frac{y}{z}}, \quad Z=\sqrt{\frac{1}{z}};$$

so kommt resp. aus (2), (3), (1)

$$(5) \qquad Z^2=\frac{1}{b}(X^2\cot\alpha+2X+\cot\gamma),$$

$$(7)\qquad Z^2=\frac{1}{a}(Y^2\cot\beta+2Y+\cot\gamma),$$

$$(6)\qquad Z^2=\frac{1}{c}(X^2\cot\alpha+2XY+Y^2\cot\beta).$$

Setzt man die Werthe von Z^2 aus Gleichung (5) und (6) einander gleich, multiplicirt die linke Seite vor der Klammer mit $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ und in der Klammer mit $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, die rechte Seite vor der Klammer mit $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ und in der Klammer mit $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, berücksichtigt dann, dass wegen $a:b=\sin2\alpha:\sin2\beta=\sin\alpha\cos\alpha:\sin\beta\cos\beta$

$$\frac{\sin\beta}{b\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{a\cos\beta}$$

ist, streicht also links und rechts die vor der Klammer stehenden gleichen Grössen, multiplicirt hierauf beiderseits mit $\sin\alpha\sin\beta$, addirt dann links $\sin^2\alpha-\sin^2\alpha$ und rechts $\sin^2\beta-\sin^2\beta$, beachtet, dass links die beiden Glieder

$$\cot\gamma.\cos\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos(\alpha+\gamma)=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

denselben Werth haben, wie rechts die beiden Glieder

$$\cot\gamma\cos\beta\sin\beta-\sin^2\beta,$$

dass dieselben also auf beiden Seiten gestrichen werden können; so stellen sich beide Seiten der Gleichung als vollständige Quadrate dar, und die Ausziehung der Quadratwurzel ergibt

$$(8)\qquad X\cos\alpha+\sin\alpha=Y\cos\beta+\sin\beta$$

oder

$$X\cos\alpha-Y\cos\beta=\sin\beta-\sin\alpha$$

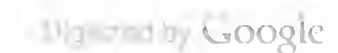
und wenn man für X und Y ihre Werthe aus (4) wieder einführt und mit $\sqrt{z}$ multiplizirt,

$$(9)\qquad \cos\alpha\sqrt{x}-\cos\beta\sqrt{y}=(\sin\beta-\sin\alpha)\sqrt{z}.$$

Symmetrisch muss man haben

$$(10)\qquad \cos\beta\sqrt{y}-\cos\gamma\sqrt{z}=(\sin\gamma-\sin\beta)\sqrt{x},$$

$$(11)\qquad \cos\gamma\sqrt{z}-\cos\alpha\sqrt{x}=(\sin\alpha-\sin\gamma)\sqrt{y}.$$



Durch Addition je zweier dieser drei Gleichungen verschwindet Eine Unbekannte und man erhält für das Verhältniss der anderen beiden folgende Werthe:

$$(12) \qquad \frac{x}{y} = \left(\frac{\sin\gamma - \sin\alpha + \cos\beta}{\sin\gamma - \sin\beta + \cos\alpha}\right)_2,$$

$$(13) \qquad \frac{x}{z} = \left(\frac{\sin\beta - \sin\alpha + \cos\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma + \cos\alpha}\right)^2,$$

$$(14) \qquad \frac{y}{z} = \left(\frac{\sin\alpha - \sin\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha - \sin\gamma + \cos\beta}\right)^2.$$

Diese Ausdrücke lassen sich unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^0$$

leicht in folgende Formen bringen, von denen bald diese, bald jene einen bequemeren Gebrauch verstattet:

$$(15) \qquad \frac{x}{y} = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(\frac{1+\sin\beta}{1+\cos\beta}\right),$$

$$\frac{x}{z} = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(\frac{1+\sin\gamma}{1+\cos\gamma}\right),$$

$$(17) \qquad \frac{y}{z} = \left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}\right)\left(\frac{1+\sin\gamma}{1+\cos\gamma}\right).$$

Hiernach stehen die gesuchten drei Radien in folgender Proportion:

$$(18)\qquad x:y:z=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\right)^2:\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\right)^2:\left(\frac{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2$$

$$=\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{\gamma}}{\cos(45^0-\frac{\alpha}{2})}\right]^2:\left[\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos(45^0-\frac{\beta}{2})}\right]^2:\left[\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos(45^0-\frac{\gamma}{2})}\right]^2$$

oder

$$(19)\quad x:y:z=\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\alpha}{2}\right)^2}:\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\beta}{2}\right)^2}:\frac{1}{\left(1+\tang\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

oder

$$(20)\qquad x:y:z=\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}:\frac{1+\cos\beta}{1+\sin\beta}:\frac{1+\cos\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Konstruiren lassen sich drei Linien, welche den gesuchten Radien proportional sind, am leichtesten nach der Formel (20); berechnen dagegen lassen sie sich am leichtesten nach der Formel (18).

Um die Formel (20) zu einer geometrischen Konstruktion geschickt zu machen, schreiben wir dieselbe, indem p, q, r die obigen Bedeutungen haben,

$$(21)\qquad x:y:z=\frac{p+p\cos\alpha}{p+p\sin\alpha}:\frac{q+q\cos\beta}{q+q\sin\beta}:\frac{r+r\cos\gamma}{r+r\sin\gamma}$$

$$=\frac{p+e}{p+h}:\frac{q+f}{q+h}:\frac{r+g}{r+h},$$

oder, wenn l irgend eine beliebige Länge bezeichnet,

$$(22)\qquad x:y:z=\left(\frac{p+e}{p+h}\right)l:\left(\frac{q+f}{q+h}\right)l\left(\frac{r+g}{r+h}\right)l\;.$$

Solche drei Linien, wie

$$\left(\frac{p+e}{p+h}\right)l,\quad\left(\frac{q+f}{q+h}\right)l\left(\frac{r+g}{r+h}\right)l,$$

welche den gesuchten Radien x, y, z proportional sind, lassen sich ungemein leicht darstellen. Man braucht nur auf dem Einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Taf. IX. Fig. 3.)

$$OP,\ OQ,\ OR \text{ resp.} = p+h,\ q+h,\ r+h,$$

auf dem anderen Schenkel

$$OE,\ OF,\ OG \text{ resp.} = p+e,\ q+f,\ r+g$$

zu machen, PE, QF, RG zu ziehen und durch einen beliebigen Punkt L des ersten Schenkels (wofür $OL=1$ wird) die Linien LX, LY, LZ resp. parallel PE, QF, RG zu ziehen. Alsdann besitzen die Linien OX, OY, OZ die verlangte Eigenschaft, indem man hat

$$x:y:z = OX:OY:OZ.$$

Beschreibt man nun mit den Radien OX, OY, OZ drei sich gegenseitig berührende Kreise, was sehr leicht ist, legt um dieselben nach Taf. IX. Fig 4. die gemeinschaftlichen Tangenten; so bilden die letzteren ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gegebenen ABC ähnlich ist. Zieht man dann, wenn E', F', G' die Mittelpunkte der verzeichneten Kreise sind, durch A und F' die Linie AF und durch A und G' die Linie AG; so führen dieselben zu den Mittelpunkten F und G zweier gesuchten Kreise. Den Mittelpunkt E des dritten Kreises liefert eine durch G mit $G'E'$ parallel gezogene Linie GE.

Ausdrücke für die absolute Länge eines jeden der gesuchten Radien erhält man, indem man die Werthe von $X=\frac{x}{z}$ und $Y=\frac{y}{z}$ aus Gleichung (16) und (17) in Gleichung (7) substituirt. Da hierin $Z=\sqrt{\frac{1}{z}}$ ist; so ergibt sich nach einigen Transformationen mittelst bekannter trigonometrischen Formeln:

$$(23)\qquad z=2c\sqrt{2}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und symmetrisch

$$(24)\qquad y=2b\sqrt{2}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\beta\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

$$(25)\quad x=2a\sqrt{2}.\frac{\sin\frac{\beta}{2}\ \text{in}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Diese letzteren Ausdrücke eignen sich besonders zur arithmetischen Berechnung der gesuchten Grössen.

XXXVIII.

Ueber die Entstehung der Flächen des zweiten Grades.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Man pflegt gewöhnlich die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0$$

der Betrachtung der Flächen zweiten Grades zu Grunde zu legen und dann von da aus die Arten dieser Flächen abzuleiten und sie zu betrachten. Es ist jedoch zweckmässiger, zunächst die verschiedenen Arten derselben gesondert zu untersuchen und erst nachher die obige allgemeine Gleichung weiter zu verfolgen. Am Einfachsten wird die Anschauung dieser Flächen hervorgerufen werden, wenn man sie durch Bewegung von Kurven zweiter Ordnung entstehen lässt. Es ist mir nicht bekannt, ob diese Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades allgemein bekannt ist; ich will dieselbe desshalb hier aufführen. Kugel-, Kegel- und Zylinderfläche übergebe ich aus dem angeführten Grunde.

Das Ellipsoid.

Man denke sich in der Ebene xz (ich nehme drei auf einander senkrechte Koordinatenebenen an) eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten, deren eine Axe, $2a$, mit der Axe der x, deren andere, $2c$, mit der Axe der z zusammenfällt; ferner in der Ebene der yz eine ähnliche Ellipse, deren Mittelpunkt abermals mit dem Anfangspunkt, deren Axe $2b$ mit der Axe der y, deren andere Axe $2c$ mit der Axe der z zusammenfällt. Parallel der Ebene der xy lasse man nun eine veränderliche Ellipse sich so bewegen, dass die Endpunkte ihrer beiden Hauptaxen sich immer in den beiden vorigen Ellipsen befinden. Man verlangt die Gleichung der entstehenden Fläche.

Denken wir uns die bewegliche Ellipse, deren Hauptaxen immer in den Ebenen der xz und yz, parallel den Axen der x und y, sich befinden, in der Entfernung h von der Ebene der xy, so werden ihre Halbaxen sein:

a) parallel der Axe der x, da die Gleichung der Ellipse in der Ebene der xz ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gleich $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$,

b) parallel der Axe der y, da die Gleichung der Ellipse in der Ebene der yz ist

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gleich $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.

Die Gleichungen der beweglichen Ellipse in der angeführten Lage sind folglich

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \quad z=h;$$

eliminirt man h, so erhält man als Gleichung der gesuchten Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Die Fläche der Ellipse in dieser Lage ist

$$\pi ab \sqrt{\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{h}{c^2}\right)} = \pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right).$$

Daraus folgt, dass der Inhalt eines Schnitts, dessen Grundfläche diese Ellipse, dessen Höhe ∂h, gleich:

$$\pi ab\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h,$$

also das Stück des Körpers, das zwischen der Ebene der xy und einem mit ihr parallelen Schnitt, dessen Entfernung von der Ebene der xy z ist, ist gleich:

$$\pi ab\int_0^z\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h = \pi ab\left(z-\frac{z^3}{3c^2}\right).$$

Setzt man $z=c$, so erhält man den Inhalt des halben Ellipsoids

$$=\pi ab\left(c-\frac{c}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}abc,$$

also der des ganzen Ellipsoids

$$=\frac{4\pi}{3}abc.$$

Uebrigens ist die Fläche eine in jeder Weise begrenzte.

Das Hyperboloid mit einem Fache.

Man denke sich in der Ebene der xz eine (doppeltheilige) Hyperbel, deren reelle Axe $2a$ mit der Axe der x, deren imaginäre $2c$ mit der Axe der z und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt; eben so denke man sich in der Ebene der yz eine Hyperbel, deren reelle Axe $2b$ mit der Axe der y, deren imaginäre $2c$ mit der Axe der z zusammenfällt, wenn der Mittelpunkt zugleich im Anfangspunkt der Koordinaten ist. Man sieht nun leicht, dass vier Hyperbellarme über, vier unter der Ebene der xy sich befinden. Nun lasse man eine Ellipse, parallel der Ebene der xy sich so bewegen, dass die Endpunkte ihrer Hauptaxen immer auf den Hyperbelarmen sich befinden. Man fragt nach der Gleichung der entstehenden Fläche.

Die Gleichung der ersten Hyperbel ist:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

die der zweiten:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Denken wir uns nun die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy, so sind ihre Axen:

a) parallel der Axe der x:

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

b) parallel der Axe der y:

$$b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Demnach sind die Gleichungen der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \quad z=h,$$

woraus als Gleichung der erzeugten Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Dieselbe erstreckt sich nach zwei Seiten hin ins Unendliche, besteht aber aus einem zusammenhängenden Stücke.

Der Inhalt des Raumes, innerhalb der vier Hyperbelarme, und zwischen der Ebene der xy und einem in der Entfernung z mit ihr parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_0^z\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)\partial h=\pi ab\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right).$$

Jede der Hyperbeln hat Asymptoten, deren Gleichungen:

für die erste $\quad x=\pm\frac{a}{c}z, \quad y=0;$

für die zweite $\quad y=\frac{b}{c}z, \quad x=0.$

Lässt man nun eine veränderliche Ellipse, genau wie so eben, sich auf den Asymptotenarmen bewegen, so findet man als Gleichung des entstehenden Asymptotenkegels:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Der Inhalt des Stücks zwischen der Spitze und einem mit der Ebene der xy, in der Entfernung z parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_0^z \frac{h^2}{c^2}\partial h = \pi ab\frac{z^3}{3},$$

so dass das zwischen Kegel und Hyperboloid liegende Körperstück:

$$\pi abz$$

ist.

Das Hyperboloid mit zwei Fächern.

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Hyperbel, deren reelle Axe $2c$ mit der Axe der z, deren imaginäre Axe $2a$ mit der Axe der x und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt; ferner eine zweite Hyperbel in der Ebene der yz, deren reelle Axe $2c$ wieder mit der Axe der z, deren imaginäre $2b$ mit der Axe der y und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfalle. Man lasse nun eine Ellipse (sowohl unter als über der Ebene der xy) sich parallel der Ebene der xy so bewegen, dass die Endpunkte der Hauptaxen beständig auf den vier Hyperbelarmen seien. Man verlangt die Gleichung der erzeugten Fläche.

Die Gleichung der Hyperbel in der Ebene der xz ist

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

der in der Ebene der yz:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Sei nun die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy, so sind ihre Hauptaxen:

a) parallel der Axe der x:

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

b) parallel der Axe der y:

$$b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

Also sind die Gleichungen der beweglichen Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1, \quad z=h,$$

woraus nun als Gleichung der erzeugten Fläche folgt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Diese Fläche besteht aus zwei ganz getrennten, sonst aber gleichen Stücken, deren Entfernung, Scheitel von Scheitel, gleich $2c$ ist. Das Körperstück vom Scheitel bis zu dem mit der Ebene der xy in der Entfernung z parallelen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_c^z\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\partial h=\pi ab\left(\frac{z^3}{3c^2}-z+\frac{2c}{3}\right), \quad z>c.$$

Die Gleichung des Asymptotenkegels ist, wie oben:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Das Stück desselben, vom Anfangspunkt bis zu dem obigen Schnitte ist:

$$\pi ab\int_0^z\frac{h^2}{c^2}\partial h=\frac{\pi abz^3}{3c^2},$$

so dass das zwischen Kegel und Hyperboloid befindliche Stück:

$$\pi ab\left(z-\frac{2c}{3}\right)$$

ist.

Das elliptische Paraboloid

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Parabel, deren Hauptaxe mit der Axe der z, deren Scheitel mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, und deren Parameter $\frac{2a^2}{c}$ ist; ferner eine zweite Parabel, deren Scheitel gleichfalls im Anfangspunkt liegt, die in der Ebene der yz sich so befindet, dass ihre Hauptaxe mit der Axe der z zusammenfällt und ihr Parameter $\frac{2b^2}{c}$ ist. Je nachdem, ob c positiv oder negativ ist, werden vier Parabelarme über oder unter der Ebene der xy sich befinden. Man lasse nun eine Ellipse, wie im Früheren, sich parallel der Ebene der xy bewegen, so dass die Enden ihrer Hauptaxen auf den vier Pa-

rabelarmen sich befinden Welches ist die Gleichung der entstehenden Fläche?

Die Gleichung der ersten Parabel ist $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$, der zweiten $y^2 = \frac{2b^2}{c} z$. Daraus folgt, dass, wenn die bewegliche Ellipse in der Entfernung h von der Ebene der xy ist, die Axen derselben $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$ und $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$ sein werden, so dass ihre Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2 \frac{2h}{c}} + \frac{y^2}{b^2 \frac{2h}{c}} = 1, \quad z = h$$

sind, woraus nun als Gleichung der erzeugten Fläche folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

Diese Fläche liegt ganz auf einer Seite der Ebene der xy; der Anfangspunkt der Koordinaten ist ihr Scheitel. Zwischen dem Scheitel und einem mit der Ebene der xy in der Entfernung z parallel gelegten Schnitte ist das Körperstück

$$\pi ab \int_0^z \frac{2h}{c} \partial h = \frac{\pi ab z^2}{c}.$$

Diese Flächenräume wachsen also mit dem Quadrat der Ordinate z. Der Inhalt eines Kegels, der denselben Scheitel und denselben Schnitt zur Grundfläche hätte, wäre:

$$\pi ab \frac{2z}{c} \cdot \frac{z}{3} = \frac{2\pi}{3c} ab z^2,$$

so dass das Hyperboloid um die Hälfte mehr ist.

Das hyperbolische Paraboloid.

Denken wir uns in der Ebene der xz eine Parabel vom Parameter $\frac{2a^2}{c}$, deren Hauptaxe auf der Axe der z liegt, und deren Scheitel in den Anfangspunkt fällt; sodann eine zweite Parabel vom Parameter $-\frac{2b^2}{c}$, deren Hauptaxe gleichfalls auf der Axe der z, die Parabel selbst in der Ebene der yz sich befindet, während der Scheitel wieder mit dem vorigen zusammenfällt. Es ist klar, dass jetzt zwei Parabelarme nach oben, zwei nach unten

gehen. Man lasse nun zwei Hyperbeln von der Ebene der xy aus, parallel mit dieser Ebene, sich so bewegen, dass die Scheitel ihrer reellen Hauptaxen sich auf den Parabelarmen befinden, während die Hyperbeln konjugirt sind, d. h. die reelle Axe der einen gleich der imaginären der andern, wenn die Hyperbeln gleich weit abstehen von der Ebene der xy. Welches ist die Gleichung der entstehenden Fläche?

Es ist klar, dass eine Hyperbel sich nach oben, die andere nach unten bewegt. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden.

1) Sei c positiv. Alsdann ist die Gleichung der obern Parabel $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$, der untern $y^2 = -\frac{2b^2}{c} z$. In der Entfernung h ist die reelle Axe der obern Hyperbel $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$; in der Entfernung $-h$ ist die reelle Axe der untern $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$. Demnach sind die Gleichungen der obern Hyperbel:

$$\frac{x^2}{2a^2\frac{h}{c}} - \frac{y^2}{2b^2\frac{h}{c}} = 1, \quad z = h;$$

der unteren:

$$\frac{y^2}{2b^2\frac{h}{c}} - \frac{x^2}{2a^2\frac{h}{c}} = 1, \quad z = -h.$$

In beiden Fällen folgt als Gleichung der erzengten Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

2) Sei c negativ. Alsdann ist die Gleichung der obern Parabel $y^2 = -\frac{2b^2}{c} z$, der untern $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$. Die reelle Axe der obern Hyperbel in der Entfernung h ist $b\sqrt{-\frac{2h}{c}}$, der andern in der Entfernung $-h$: $a\sqrt{-\frac{2h}{c}}$; also die Gleichungen der obern Hyperbel:

$$\frac{y^2}{-2\frac{b^2h}{c}} - \frac{x^2}{-2\frac{a^2h}{c}} = 1, \quad z = h;$$

der untern:

$$\frac{x^2}{-2\frac{a^2h}{c}} - \frac{y^2}{-2\frac{b^2h}{c}} = 1, \quad z = -h;$$

woraus wieder als Gleichung der Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}.$$

In jedem Falle sieht man, besteht die Fläche aus vier **Theilen,** die sich ins Unendliche erstrecken. Diese vier Theile, **stehen** sich gewissermassen im Kreuz entgegen. Da für den Fall $h=0$ die obere Hyperbel sowohl als die untere sich in die Linien

$$x = \pm \frac{a}{b} y, \quad z = 0$$

verwandeln, so vereinigen sich die vier Stücke in diesen zwei Linien, die nichts Anderes sind, als die Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Weitere Untersuchungen dieser Fläche liegen für den Augenblick ausser unserer Betrachtung.

XXXIX.

Ueber Lamberts Satz von der Quadratur parabolischer Sectoren.

Von
dem Herausgeber.

Das schöne Theorem von Lambert oder Euler über die Quadratur parabolischer Sectoren ist in der Astronomie bekannter wie in der Geometrie; aber sehr mit Unrecht, da seine geometrische Eleganz gewiss eben so gross ist wie sein Nutzen in der Astronomie bei der Berechnung der als Parabeln betrachteten Cometenbahnen. Es ist daher sehr zu wünschen, dass dasselbe bald völliges Bürgerrecht in der Lehre von den Kegelschnitten erhalte, was bis jetzt leider noch nicht der Fall ist.

Man findet diesen schönen Satz, in Verbindung mit verschiedenen astronomischen Lehren und in unmittelbarer Beziehung auf diese, in der eleganten kleinen Schrift von Lambert: Insigniores orbitae cometarum proprietates. Aug. Vindelic. 1761. §. 83. und auch in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik. Thl. III. S. 257. In der Theoria motus corporum coelestium. p. 119. hat jedoch Gauss nachgewiesen, dass die erste Erfindung dieses schönen Satzes eigentlich Euler gebührt. Schon vor einer langen Reihe von Jahren habe ich für denselben einen Beweis in Crelle's Journal der reinen und angewandten Mathematik. Thl. XVI. S. 21. gegeben, welcher bloss ganz elementare Betrachtungen der analytischen Geometrie in Anspruch nimmt, und habe verschiedene andere Sätze, namentlich auch einen, wie ich glaube, merkwürdigen Ausdruck für den Flächeninhalt eines parabolischen Segments, hinzugefügt. Indem ich aus zufälliger Veranlassung diesen Gegenstand jetzt wieder aufnehme, will ich im Folgenden einen Beweis des in Rede stehenden merkwürdigen Theorems geben,

der zwar auf einer einfachen Betrachtung mit Hülfe der Integralrechnung beruhet, sonst aber sich bloss elementarer analytisch-trigonometrischer Rechnungen und einiger keiner Schwierigkeit unterliegenden arithmetischen Transformationen bedient. Uebrigens würde es auch leicht sein, die Anwendung der Integralrechnung mittelst der bekannten Quadratur der Parabel ganz zu umgehen, und dann würde der Aufnahme des folgenden Beweises in die Elemente der Kegelschnitte nach meiner Meinung nichts entgegen stehen. Die Substituirung einer ganz elementaren Betrachtung für die im Folgenden angewandten wenigen Integralformeln, — die übrigens ganz allgemein bekannt sind, — kann ich aber hier füglich den Lesern vollständig überlassen.

Die allgemeine Polargleichung der Parabel ist bekanntlich

$$r=\frac{p}{2(1+\cos\varphi)}=\frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^2},$$

wo der Winkel φ von dem, von dem Brennpunkte der Parabel nach iherm Scheitel gezogenen Radius vector an immer nach derselben Seite hin, etwa nach der Seite hin, auf welcher die positiven Ordinaten genommen werden, von 0 bis 360° gezählt wird; also ist

$$r^2=\frac{p^2}{16\cos\frac{1}{2}\varphi^4},$$

und folglich

$$\frac{1}{2}r^2\partial\varphi=\frac{p^2\partial\varphi}{32\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{p^2}{16}\cdot\frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$$

Bezeichnen wir aber, indem wir

$$\varphi<180^0$$

annehmen, den Flächeninhalt des zwischen dem von dem Brennpunkte der Parabel nach ihrem Scheitel gezogenen Radius vector $\frac{1}{4}p$ und dem Radius vector r enthaltenen Sectors der Parabel durch S, so ist nach einem bekannten Satze der Integralrechnung

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\partial\varphi;$$

also nach dem Obigen

$$S=\frac{p^2}{16}\int_0^\varphi \frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}.$$

Nun findet man aber leicht nach einer bekannten Integralformel

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi^3}+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}\varphi}\right)\sin\frac{1}{2}\varphi$$

oder

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}=\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\left(2+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\cdot\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$S=\frac{p^2}{48}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\cdot\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{p}{4r},$$

also

$$\sin\frac{1}{2}\varphi^2=1-\frac{p}{4r}=\frac{4r-p}{4r},$$

und folglich, weil

$$\frac{1}{2}\varphi<90^0$$

ist, also $\sin\frac{1}{2}\varphi$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi$ positiv sind:

$$\sin\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{4r-p}}{2\sqrt{r}},\quad \cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{r}};$$

folglich

$$\tang\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sqrt{4r-p}}{\sqrt{p}}.$$

Ferner findet man leicht:

$$\frac{1+2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}=\frac{2(2r+p)}{p}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$S=\frac{1}{24}\sqrt{p}.(2r+p)\sqrt{4r-p}.$$

Bezeichnen wir nun überhaupt den zwischen den beiden Vectoren r und r' enthaltenen Sector der Parabel durch $\mathfrak{S}$, und nehmen in dem Falle, wo r und r' auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, an, dass r' grösser als r sei, so ist

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{24}\sqrt{p}.\{(2r'+p)\sqrt{4r'-p}\mp(2r+p)\sqrt{4r-p}\},$$

indem man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Vectoren r und r' auf einer und derselben Seite, oder auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel liegen.

Die von den Vectoren r und r' mit der Axe der Parabel eingeschlossenen und auf bekannte Weise genommenen Winkel bezeichnen wir durch φ und φ', so dass also

$$r=\frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^2},\quad r'=\frac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi'^2}$$

ist, und den von den beiden Vectoren r und r' mit einander eingeschlossenen, nach der Seite der Parabel hin liegenden Winkel wollen wir im Folgenden durch θ bezeichnen.

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn die Vectoren r, r' auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegen, und nehmen grösserer Bestimmtheit wegen an, dass diese Vectoren beide auf der positiven Seite der Axe der Parabel liegen und $r'>r$ sei, so sind offenbar $\cos\frac{1}{2}\varphi$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi'$ beide positiv, also nach dem Obigen

$$\sqrt{r}=\frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi},\quad \sqrt{r'}=\frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi'}$$

oder

$$\sqrt{p} = 2\cos\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{r}, \quad \sqrt{p} = 2\cos\frac{1}{2}\varphi' . \sqrt{r'};$$

folglich

$$\cos\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{r} = \cos\frac{1}{2}\varphi' . \sqrt{r'}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi' - \varphi = \theta,$$

also

$$\varphi' = \varphi + \theta, \quad \varphi = \varphi' - \theta;$$

folglich

$$\cos\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{r} = \cos\frac{1}{2}(\varphi + \theta) . \sqrt{r'},$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi' . \sqrt{r'} = \cos\frac{1}{2}(\varphi' - \theta) . \sqrt{r};$$

oder

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \theta)}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \tan\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi' - \theta)}{\cos\frac{1}{2}\varphi'} = \cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta \tan\frac{1}{2}\varphi';$$

also

$$\tan\frac{1}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r'}}{\sin\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r'}},$$

$$\tan\frac{1}{2}\varphi' = \frac{\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r}}{\sin\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r}}.$$

Weil nun

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \cos\frac{1}{2}\varphi'^2 = \frac{1}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi'^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{r'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi'^2 = \frac{r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}};$$

also nach dem Obigen

$$p = \frac{4rr'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}.$$

Hieraus folgt mittelst leichter Rechnung:

$$4r-p = \frac{4r(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$4r'-p = \frac{4r'(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}$$

und

$$2r+p = 2r\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$2r'+p = 2r'\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}.$$

Weil unter der gemachten Voraussetzung tang $\frac{1}{2}\varphi$ und tang $\frac{1}{2}\varphi'$ beide positiv sind, so sind nach dem Obigen

$$\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'},\quad \sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r}$$

respective

negativ, positiv;

also nach dem Vorhergehenden

$$\sqrt{4r-p}=-\frac{2(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p}=\frac{2(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}.$$

Nach gehöriger Substitution in die aus dem Obigen bekannte Formel

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{24}\sqrt{p}.\{(2r'+p)\sqrt{4r'-p}-(2r+p)\sqrt{4r-p}\}$$

ergiebt sich

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}=$$

$$\frac{r'(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}}{(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}$$

$$+\frac{r(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}}{(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}}.$$

Der Zähler der Summe der beiden Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist

$$(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\left\{\begin{array}{l} r'(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'} \\ \qquad +r(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r} \end{array}\right\}$$

$$+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2\{(\sqrt{r'}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r})\sqrt{r'}+(\sqrt{r}-\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})\sqrt{r}\}$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{r^2+r'^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}\}$$

$$+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{r^2+r'^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2rr'\sin\tfrac{1}{2}\theta^2\}$$

$$=(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\{(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2\}.$$

Setzt man jetzt

$$(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2=0,$$

und löst diese quadratische Gleichung in Bezug auf $r+r'$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$r+r'=\left\{\begin{array}{l} 2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'} \\ -\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}; \end{array}\right.$$

also ist

$$(r+r')^2-(r+r')\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}-2rr'\cos\tfrac{1}{2}\theta^2$$

$$=(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}),$$

und folglich obiger Zähler

$$(r+r'+\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})(r+r'-2\cos\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})^2.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}=(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}\,,$$

oder

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}\,.$$

Weil diese Formel in Bezug auf r und r' völlig symmetrisch ist, so ist es nun nicht mehr nöthig, anzunehmen, dass r' der grössere Radius vector sei, indem man vielmehr in dieselbe jede zwei beliebige auf einer und derselben Seite der Axe der Parabel liegende Vectoren einführen kann. Auch ist es natürlich nicht weiter nöthig anzunehmen, dass r, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liegen.

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wenn die Vectoren r, r' auf verschiedenen Seiten der Axe der Parabel liegen, und wollen für's Erste grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass r auf der negativen, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liege.

Weil in diesem Falle unter der so eben gemachten Voraussetzung offenbar $\cos\frac{1}{2}\varphi$ negativ und $\cos\frac{1}{2}\varphi'$ positiv ist, so ist

$$\sqrt{r}=-\frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}\,,\qquad \sqrt{r'}=\frac{\sqrt{p}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi'}$$

oder

$$\sqrt{p}=-2\cos\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{r}\,,\quad \sqrt{p}=2\cos\frac{1}{2}\varphi'.\sqrt{r'}\,;$$

folglich

$$\cos\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{r}=-\cos\frac{1}{2}\varphi'.\sqrt{r'}\,.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi'+(360^0-\varphi)=\varphi'-\varphi+360^0=\theta,$$

also

$$\varphi'=\varphi+\theta-360^0,\qquad \varphi=\varphi'-\theta+360^0;$$

$$\frac{1}{2}\varphi'=\frac{1}{2}(\varphi+\theta)-180^0,\qquad \frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi'-\theta)+180^0\,;$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi' = -\cos\frac{1}{2}(\varphi+\theta), \quad \cos\frac{1}{2}\varphi = -\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\theta);$$

folglich nach dem Obigen

$$\cos\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{r} = \cos\frac{1}{2}(\varphi+\theta).\sqrt{r'},$$

$$\cos\frac{1}{2}\varphi'.\sqrt{r'} = \cos\frac{1}{2}(\varphi'-\theta).\sqrt{r};$$

woraus ganz eben so wie vorher

$$\tang\frac{1}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'}}{\sin\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'}},$$

$$\tang\frac{1}{2}\varphi' = \frac{\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r}}{\sin\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r}};$$

un

$$p = \frac{4rr'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

so wie

$$4r-p = \frac{4r(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r'})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$4r'-p = \frac{4r'(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{r})^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}};$$

und

$$2r+p = 2r\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}+2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

$$2r' + p = 2r' \frac{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'} + 2r\sin\frac{1}{2}\theta^2}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'}}$$

folgt.

Weil unter der gemachten Voraussetzung $\tang\frac{1}{2}\varphi$ negativ und $\tang\frac{1}{2}\varphi'$ positiv ist, so ist nach dem Obigen

$$\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r'}, \quad \sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r}$$

respective

positiv, positiv;

also nach dem Vorhergehenden

$$\sqrt{4r-p} = \frac{2(\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r'})\sqrt{r}}{\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p} = \frac{2(\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r})\sqrt{r'}}{\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'}}}.$$

Nach gehöriger Substitution in die aus dem Obigen bekannte Formel

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{24}\sqrt{p} . \{(2r'+p)\sqrt{4r'-p} + (2r+p)\sqrt{4r-p}\}$$

ergiebt sich

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}} =$$

$$\frac{r'(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'} + 2r\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r})\sqrt{r'}}{(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'})\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'}}}$$

$$+ \frac{r(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'} + 2r'\sin\frac{1}{2}\theta^2)(\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{r'})\sqrt{r}}{(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'})\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta . \sqrt{rr'}}},$$

welches wieder ganz dieselbe Formel wie oben ist. Also ist auch in diesem Falle ganz wie oben

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}},$$

und da diese Formel in Bezug auf r und r' völlig symmetrisch ist, so ist es nicht nöthig, dass r auf der negativen, r' auf der positiven Seite der Axe der Parabel liege, sondern es kann auch umgekehrt sein.

Als Resultat der ganzen vorigen Betrachtung ergiebt sich, dass, wenn r, r' zwei beliebige Vectoren der Parabel sind, und θ den von diesen beiden Vectoren eingeschlossenen, nach der Seite der Parabel hin liegenden Winkel, der von 0 bis 360° wachsen kann, bezeichnet, in völliger Allgemeinheit der Flächeninhalt des parabolischen Sectors $\mathfrak{S}$ durch die Formel

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'})\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'}}$$

dargestellt wird.

Bezeichnet nun s die Sehne der Parabel, welche die Endpunkte der beiden Vectoren r, r' mit einander verbindet, so ist, jenachdem

$$0<\theta<180^\circ$$

oder

$$180^\circ<\theta<360^\circ$$

ist, nach den Lehren der ebenen Trigonometrie respective

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta$$

oder

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(360^\circ-\theta);$$

also allgemein

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta,$$

und folglich

$$\cos\theta=\frac{r^2+r'^2-s^2}{2rr'}.$$

also



$$2\cos\frac{1}{2}\theta^2 = 1 + \frac{r^2+r'^2-s^2}{2rr'} = \frac{(r+r')^2-s^2}{2rr'},$$

folglich

$$\cos\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{(r+r')^2-s^2}{4rr'},$$

und hieraus, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

$$0 < \theta < 180^0$$

oder

$$180^0 < \theta < 360^0$$

ist:

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{\sqrt{(r+r')^2-s^2}}{2\sqrt{rr'}},$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(r+r')^2-s^2},$$

$$2\cos\frac{1}{2}\theta.\sqrt{rr'} = \pm\sqrt{(r+r')^2-s^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{12}\sqrt{p}.\{2(r+r')\pm\sqrt{(r+r')^2-s^2}\}\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}},$$

wenn man immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r, r' nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist, was auch im Folgenden stets festgehalten werden soll.

Nun setze man

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}} = \sqrt{x}\mp\sqrt{y},$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2} = x+y\mp 2\sqrt{x}.\sqrt{y},$$

und folglich durch Vergleichung der rationalen und irrationalen Theile auf beiden Seiten:

$$x+y=r+r', \quad 4xy=(r+r')^2-s^2;$$

also

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=s^2,$$

woraus, indem jetzt keine Beziehung der Zeichen zu den obigen Statt finden soll,

$$x-y=\pm s$$

folgt, so dass man folglich die beiden Gleichungen

$$x+y=r+r', \quad x-y=\pm s$$

hat, aus denen sich

$$x=\frac{r+r'\pm s}{2}, \qquad y=\frac{r+r'\mp s}{2}$$

ergiebt. Da nun im Obigen

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}$$

positiv genommen ist, so muss man

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}=\sqrt{\frac{r+r'+s}{2}}\mp\sqrt{\frac{r+r'-s}{2}}$$

setzen, weil von

$$\sqrt{\frac{r+r'-s}{2}}\mp\sqrt{\frac{r+r'+s}{2}}$$

das obere Zeichen einen negativen Werth liefert, der hier, eben weil

$$\sqrt{r+r'\mp\sqrt{(r+r')^2-s^2}}$$

positiv genommen worden ist, nicht statthaft ist.

Dies vorausgesetzt kann man nun leicht $\mathfrak{S}$ auf folgende Art ausdrücken:

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{6}\sqrt{p}.\left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)+\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\pm\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mp\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\};$$

also ist, wenn man multiplicirt:

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}$$

$$=\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\pm\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\mp\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mp\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d. i.

$$\frac{6\mathfrak{S}}{\sqrt{p}}=\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mp\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\mathfrak{S}=\frac{\sqrt{p}}{6}\cdot\left\{\left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mp\left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

oder auch

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\cdot\{(r+r'+s)^{\frac{3}{2}}\mp(r+r'-s)^{\frac{3}{2}}\}\cdot$$

Dies ist der merkwürdige Ausdruck für den Flächeninhalt eines parabolischen Sectors, welcher gewöhnlich nach Lambert benannt wird, aber eigentlich, wie wir oben bereits bemerkt haben, schon früher von Euler gefunden worden ist. Ausser dem Parameter der Parabel ist also bloss die Kenntniss der beiden einen parabolischen Sector begränzenden Vectoren und der dem denselben gleichfalls begrenzenden Bogen der Parabel angehörenden Sehne nöthig, um dessen Flächeninhalt mittelst der Lambert'schen Formel berechnen zu können.

XL.

Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Eine Gerade bewege sich um eine andere, indem sie mit ihr beständig denselben Winkel α macht und sie beständig in demselben Punkte trifft. Auf ihr bewegt sich ein Punkt gegen letztere hin: welches ist die von ihm beschriebene Kurve, wenn beide Bewegungen gleichförmig sind?

Die fragliche Kurve ist eben die in der Aufschrift genannte. Sei also γ die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Geraden, β die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, und nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem so an, dass die feste Gerade darin die Axe der z ist; die Ebene der xy sei so gewählt, dass der bewegliche Punkt anfänglich in ihr liegt; ferner sei die Axe der x so genommen, dass die bewegliche Gerade anfänglich in der Ebene der xz, also der bewegliche Punkt in der (positiven) Axe der x, und die (positive) Axe der y sei so gewählt, dass die Bewegung der Geraden von der positiven Axe der x gegen die positive Axe der y geht.

Am Ende der Zeit t liegt die bewegliche Gerade so, dass ihre Projektion mit der Axe der x den Winkel γt macht, während der bewegliche Punkt in ihr um die Länge βt gegen den festen Punkt gegangen ist. Sei (Taf. IX. Fig. 5.) O der Anfangspunkt der Koordinaten, OB die Projektion der beweglichen Geraden (am Ende der Zeit t) auf die Ebene der xy, so macht die bewegliche Gerade selbst

mit der Ebene der xy den Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$, ferner ist $xOB=\gamma t$. Ist also die Entfernung des Durchschnittspunktes der beweglichen Geraden mit der Axe der z von O gleich a, so ist die Länge jener Geraden gleich $\frac{a}{\cos\alpha}$, die von $OB : a\mathrm{tg}\alpha$. Ist D die Projektion des beweglichen Punktes auf die Ebene der xy in derselben Zeit, so ist $BD=\beta t.\sin\alpha$, also $CD=a\mathrm{tg}\alpha-\beta\sin\alpha.t$. Sind also x, y, z die Koordinaten des beweglichen Punktes am Ende der Zeit t, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a\mathrm{tg}\alpha-\beta t\sin\alpha)\cos(\gamma t), \\ y &= (a\mathrm{tg}\alpha-\beta t\sin\alpha)\sin(\gamma t), \\ z &= \beta t.\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Durch Elimination von t erhält man die (zwei) Gleichungen der beschriebenen Kurve (Schraubenlinie.) Aus der letztern Gleichung ergiebt sich:

$$t=\frac{z}{\beta\cos\alpha},$$

so dass die Gleichungen der Schraubenlinie sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a-z)\mathrm{tg}\alpha.\cos\left(\frac{\gamma z}{\beta\cos\alpha}\right), \\ y &= (a-z)\mathrm{tg}\alpha.\sin\left(\frac{\gamma z}{\beta\cos\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Eben so erhält man hieraus:

$$\left(\frac{x}{a-z}\right)^2+\left(\frac{y}{a-z}\right)^2=\mathrm{tg}^2\alpha, \qquad (3)$$

als Gleichung der von der bewegten Geraden beschriebenen Kegelfläche.

Soll die Schraubenlinie auf einem Zylinder vom Halbmesser r sein, so ist $a=\infty$, $a\mathrm{tg}\alpha=r$, $\alpha=0$, also

$$\left.\begin{aligned} x=r\cos(\gamma t),\quad y=r\sin(\gamma t),\quad z=\beta t; \\ x=r\cos\left(\frac{\gamma z}{\beta}\right),\quad y=r\sin\left(\frac{\gamma z}{\beta}\right), \\ x^2+y^2=r^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Der Weg, den der bewegliche Punkt zurücklegt, während die bewegliche Gerade eine Umdrehung vollendet, heisst die Höhe des Schraubengangs.

Nun erfolgt eine vollständige Umdrehung in der Zeit $\frac{2\pi}{\gamma}$, demnach ist die Höhe des Schraubengangs $\frac{2\beta\pi}{\gamma}$. Heisst man dieselbe h, so ist

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{h}{2\pi},\quad \frac{\gamma}{\beta}=\frac{2\pi}{h};$$

also sind die Gleichungen der Schraubenlinie (2):

$$\left.\begin{aligned} x&=(a-z)\operatorname{tg}\alpha\,.\cos\left(\frac{2\pi z}{h\cos\alpha}\right),\\ y&=(a-z)\operatorname{tg}\alpha\,.\sin\left(\frac{2\pi z}{h\cos\alpha}\right);\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

die der (4):

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right),\\ y&=r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right).\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{2\pi}{h}=k$, so ergiebt sich aus (5):

$$1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2=\frac{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha(a-z)^2}{\cos^2\alpha},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha(a-z)^2}}{\cos\alpha};$$

somit die Länge des Bogens der Kurve, wenn er von $z=0$ an gerechnet wird:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_0^z\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha(a-z)^2}\,\partial z\,.$$

Setzt man $a-z=y$, $z=a-y$, so ist dieselbe:

$$-\int_a^y\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha y^2}\,\partial y\,.$$

Integrirt man, so ergiebt sich als fragliche Länge:

$$\frac{a}{2}\sqrt{1+k^2a^2\mathrm{tg}^2\alpha} - \frac{a-z}{2}\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha.(a-z)^2}$$

$$+ \frac{1}{2k\mathrm{tg}\alpha}\log\left(\frac{ak\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}}{(a-z)k\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+(a-z)^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}}\right). \qquad (7)$$

Will man die Länge der Schraubenlinie bis zum vollendeten $n$ten Umlaufe (n auch eine gebrochene Zahl), so hat man $z=\frac{2n\pi}{k}\cos\alpha$ zu setzen. Die vorkommenden Logarithmen sind natürliche.

Für den Fall des Zylinders ist $a\mathrm{tg}\alpha=r$, $\alpha=0$, $a=\infty$, also die Länge:

$$\int_0^z \sqrt{1+k^2r^2}\partial z = \sqrt{1+k^2r^2}\,.\,z, \qquad (8)$$

wie bekannt.

Für $z=a$ hört die Kurve in der Spitze des Kegels auf; also ist ihre ganze Länge:

$$\frac{a}{2}\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{2k\mathrm{tg}\alpha}\log\left(ak\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{1+a^2k^2\mathrm{tg}^2\alpha}\right). \qquad (9)$$

Man findet leicht, dass die Tangente an die Kurve (2) im Punkte (x, y, z) mit der durch denselben Punkt gehenden Lage der beweglichen Geraden einen Winkel δ macht, bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2\alpha(a-z)^2}}, \qquad (10)$$

und im Falle der Kurve (4):

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}}, \qquad (11)$$

dessgleichen, dass die Normale an die Kegelfläche (3) in diesem Punkte senkrecht auf der Tangente der Kurve in demselben Punkte steht.

Wenn man die Kegelfläche in eine Ebene abwickelt, so legt sich die Schraubenlinie ebenfalls in die Ebene. Ihre Gleichung findet sich folgendermassen.

Die Linie AB (Taf. IX. Fig. 6.) drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma\sin\alpha$ um A, während B gegen A mit der Geschwindigkeit β hin-

schreitet. Die entstandene Kurve ist die Abwickelung der Schraubenlinie, wenn man die einzelnen Theile dieser Kurve, statt fortlaufend an einander zu liegen, von einander trennt. Denkt man sich nämlich B als Anfangspunkt und beschreibt mit AB einen Kreis, so wird die so eben gesuchte Kurve ein oder mehrere Umläufe machen, bis sie in A ankommt. Man wähle nun zwei Linien AB, AD so, dass der Bogen $BD=2a\pi\mathrm{tg}\alpha$ (dem Umfang der Grundfläche des Kegels), lege nun nach einander an AD u. s. f. um A Winkel gleich BAD, und lege die zwischen ihnen befindlichen Stücke der Kurve in derselben Lage in den Winkel BAD, so werden diese Stücke die Abwickelungen der Schraubenlinie sein, während die Fläche ABD die Abwickelung der Kegelfläche ist. Da der Punkt B den Weg $2a\pi\mathrm{tg}\alpha$ macht in derselben Zeit, in der oben eine Umdrehung der Linie AB statt hatte, so lässt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit von AB bestimmen. Sei nämlich τ diese Zeit, so ist

$$a\gamma\mathrm{tg}\alpha.\tau=2a\pi\mathrm{tg}\alpha, \quad \tau=\frac{2\pi}{\gamma}.$$

Ist nun γ' die Winkelgeschwindigkeit von AB in dieser letzten Bewegung, so ist, da $AB=\frac{a}{\cos\alpha}$:

$$\frac{a}{\cos\alpha}\gamma'.\tau=2a\pi\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\tau=\frac{2\pi\sin\alpha}{\gamma'},$$

demnach

$$\frac{2\pi\sin\alpha}{\gamma'}=\frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma'=\gamma\sin\alpha, \qquad (12)$$

wie oben angegeben wurde.

Nehmen wir A als Anfangspunkt von Polarkoordinaten, und sei AC die Lage der erzeugenden Linie am Ende der Zeit t, so ist die Lage von B (B') bestimmt durch

$$\text{Winkel } BAC=\gamma\sin\alpha.t,$$

$$AB'=\frac{a}{\cos\alpha}-\beta t;$$

also, wenn $BAC=\varrho$, $AB'=r$:

$$\varrho=\gamma\sin\alpha.t, \quad r=\frac{a}{\cos\alpha}-\beta t;$$

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} - \frac{\varrho}{k\sin\alpha}, \qquad (13)$$

eine archimedische Spirale.

Ihre Länge findet sich:

$$\frac{1}{k\sin\alpha}\int_0^\varrho \sqrt{(ak\,\mathrm{tg}\alpha - \varrho)^2 + 1}\,\partial\varrho. \qquad (14)$$

Um die einem Umgang entsprechende Länge zu finden, muss man von $\varrho=0$ bis $\varrho=2\pi\sin\alpha$ integriren.

Man setze $\varrho = k\,\mathrm{tg}\alpha . x$, so erhält man aus (14):

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_0^x \sqrt{1 + k^2\mathrm{tg}^2\alpha\,(a-x)^2}\,\partial x, \qquad (15)$$

und um die Länge eines Umgangs zu finden, muss $x = \frac{2\pi\cos\alpha}{k}$ gesetzt werden. Da diess genau mit Obigem zusammenstimmt, so folgt daraus, das die Kurve sich unverkürzt abwickelt, was zu erwarten war.



XLI.

Ueber die Bestimmung des Mittelpunktes einer Fläche zweiten Grades.

Von dem
Herrn Professor Dr. J. Dienger
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Stellt

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Jz=K$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades dar, so werden, wenn diese Fläche einen Mittelpunkt hat, die Koordinaten desselben x_0, y_0, z_0 durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x_0=-\frac{(BC-D^2)G+(DE-CF)H+(DF-BE)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF},$$

$$y_0=-\frac{(DE-CF)G+(AC-E^2)H+(EF-AD)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF},$$

$$z_0=-\frac{(DF-BE)G+(EF-AD)H+(AB-F^2)J}{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF}$$

Ist nun der Nenner dieser Ausdrücke nicht Null, so hat die Fläche einen Mittelpunkt. Sie hat aber deren unendlich viele, wenn zwar der Nenner Null, zugleich aber alle drei Zähler auch Null sind. Nun ist aber, sobald der Nenner Null und einer der Zähler Null, jeder der zwei anderen Zähler Null.

Heissen nämlich die drei Zähler Z_1, Z_2, Z_3, der Nenner N, so findet man leicht, dass

$$AZ_1+FZ_2+EZ_3=-GN,$$

$$FZ_1+BZ_2+DZ_3=-HN,$$

$$EZ_1+DZ_2+CZ_3=-JN.$$

Ist nun z. B. nebst $N=0$ auch $Z_3=0$, so folgt hieraus:

$$AZ_1+FZ_2=0,$$

$$FZ_1+BZ_2=0,$$

$$EZ_1+DZ_2=0;$$

woraus nothwendig $Z_1=Z_2=0$, was den Satz beweist.

In diesem Falle liegen die Mittelpunkte zuweilen in geraden Linien (bei zylindrischen Flächen).

Als Beispiel wollen wir die Fläche

$$b^2x^2+a^2y^2+(4b^2+9a^2)z^2-6a^2yz-4b^2xz=a^2b^2$$

betrachten. Hier ist:

$$A=b^2,\ B=a^2,\ C=4b^2+9a^2,\ D=-3a^2,\ E=-2b^2,$$
$$F=G=H=J=0,\quad K=a^2b^2.$$

Also $Z_1=Z_2=Z_3=N=0$. Denken wir uns aber zuerst $G=H=J$, so ergiebt sich:

$$\frac{x_0}{z_0}=\frac{(BC-D^2)+(DE-CF)+(DF-BE)}{DF-BE+EF-AD+AB-F^2}=2,$$

$$\frac{y_0}{z_0}=\frac{DE-CF+AC-E^2+EF-AD}{DF-BE+EF-AD+AB-F^2}=3;$$

d. h. alle Mittelpunkte liegen auf der Geraden, deren Gleichungen

$$x=2z,\quad y=3z$$

sind. Die Fläche selbst ist ein elliptischer Zylinder.

XLII.

Eigenschaften der geraden Kegel und Kegelstumpfe mit sphärisch gekrümmten Grundflächen.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller

zu Wiesbaden.

Wenn man aus zwei Gegenpunkten einer Kegelfläche mit den sphärischen Radien ϱ', ϱ'' zwei Kugelkreise G', G'' beschreibt, so sind durch die Umfänge dieser Kreise zwei gerade konische Flächen bestimmt, welche die durch jene Punkte gehende Gerade zur gemeinschaftlichen Axe haben, so dass der Mittelpunkt der einen konischen Fläche ausserhalb, und der der andern innerhalb der Kugel liegt.

Hier soll von derjenigen konischen Fläche ausgegangen werden, welche ihren Mittelpunkt ausserhalb der Kugel hat, und zugleich $\varrho' > \varrho''$ angenommen sein. Die Eigenschaften der andern Fläche ergeben sich später sogleich aus denen der ersten, wenn ϱ'' negativ genommen wird.

Aus jener Verbindung des konischen Raumes mit der Kugel entstehen:

1. zwei Kegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ mit den sphärisch gekrümmten Grundflächen G', G'', deren Axen sich um den Kugeldurchmesser unterscheiden,

2. und ein Kegelstumpf $\mathfrak{C}$ mit den beiden sphärischen Grundflächen G' und G'', welcher den Kugeldurchmesser zur Axe hat und dem Unterschiede jener beiden Kegel gleich ist.

3. Der Halbmesser, die Oberfläche, der Inhalt der Kugel soll immer mit

$$r, \quad K, \quad \mathfrak{K}$$

bezeichnet werden.

4. Legt man durch die Peripherien der Kugelkreise G', G'' Ebenen, so sind die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ gleich

$$r(1-\cos\varrho'), \quad r(1-\cos\varrho'');$$

folglich ist

$$G' = 4\pi r^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 . K;$$

$$G'' = 4\pi r^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 . K.$$

Hieraus erhält man die Kugelkegel, welche G' und G'' zu Grundflächen und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze haben, gleich

$$\frac{4}{3}\pi r^3 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 . \mathfrak{K};$$

und

$$\frac{4}{3}\pi r^3 . \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 . \mathfrak{K}.$$

Werden diese um die zugehörigen Kegel mit ebenen Grundflächen vermindert, so erhält man:

5. Die Kugelabschnitte

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{3}\pi r^3 (4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 - \sin\varrho'^2\cos\varrho');$$

$$\mathfrak{A}'' = \frac{1}{3}\pi r^3 (4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 - \sin\varrho''^2\cos\varrho'').$$

Da $4\sin\frac{1}{2}\varrho^2 = 1 - \cos\varrho$, so ist

$$4\sin\frac{1}{2}\sin\varrho^2 - \sin\varrho^2\cos\varrho = 2 - 3\cos\varrho + \cos\varrho^3$$
$$= (2+\cos\varrho)(1-\cos\varrho)^2,$$

folglich auch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{3}\pi r^3 . (2+\cos\varrho)(1-\cos\varrho)^2$$

oder

$$\mathfrak{A} = \sin\tfrac{1}{2}\varrho^2 (2 + \cos\varrho) \, . \, \mathfrak{K}.$$

6. Der Kegelstumpf mit den ebenen Grundflächen G_1, G_{11}, deren Peripherien mit denen von G' und G'' zusammenfallen, ist, wie man sich alsbald überzeugt,

$$= \frac{1}{3} \pi r^3 (\cos\varrho' + \cos\varrho'') (\sin\varrho'^2 + \sin\varrho' \sin\varrho'' + \sin\varrho''^2).$$

Wird dieser um die beiden Kugelabschnitte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ vermehrt, so entsteht unser Kugelkegelstumpf $\mathfrak{C}$ und man erhält nach Division mit $\frac{1}{3}\pi r^3$:

$$\frac{3}{\pi r^3} \cdot \mathfrak{C} = (\cos\varrho' + \cos\varrho'')(\sin\varrho'^2 + \sin\varrho' \sin\varrho'' + \sin\varrho''^2)$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 - \sin\varrho'^2 \cos\varrho' + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 - \sin\varrho''^2 \cos\varrho'',$$

und, nachdem man das Product entwickelt und das Ganze vereinfacht hat,

$$\frac{3}{\pi r^3} . \mathfrak{C} = \sin(\varrho' + \varrho'')(\sin\varrho' + \sin\varrho'') + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varrho + \varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'') . 2\sin\tfrac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'')$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 .$$

Da

$$\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2 + \sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2 = \frac{1 - \cos\varrho'}{2} + \frac{1 - \cos\varrho''}{2}$$
$$= 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho''),$$

so ist, wenn die Gleichung durch 4 dividirt worden, weil $\frac{4}{3}\pi r^3 = \mathfrak{K}$ ist,

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{K}} = \sin\tfrac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')^2 \cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'')$$
$$+ 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'')$$
$$= 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')^3 \cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'').$$

Es ist demnach

$$\mathfrak{C} = \left\{ 1 - \cos\frac{1}{2}(\varrho' + \varrho'')^3 \cos\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'') \right\} . \mathfrak{K},$$

d. i. Der Inhalt eines Kugelkegelstumpfs wird gefunden, wenn man die dritte Potenz des Cosinus der halben Summe der Radien beider Grundflächen mit dem Cosinus des halben Unterschieds derselben multiplicirt und diesem von 1 subtrahirten Producte die zugehörige Kugel zur Einheit giebt.

Denkt man sich diesen Stumpf aus der Kugel herausgeschnitten, so bleibt ein von einer Kugel- und einer Kegel-Zone begrenztes Zweiflach übrig, dessen Inhalt

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^3\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').\mathfrak{K}$$

durch eine sehr einfache Formel gegeben ist.

7. Um den zu denselben Grundflächen gehörigen Kegelstumpf zu finden, dessen Seitenkanten einander unverlängert schneiden, setze man ϱ'' negativ, wodurch man

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')^3.\mathfrak{K}$$

erhält.

Demnach ist für diesen Fall das Product aus dem Cosinus der halben Summe der Radien in die dritte Potenz des Cosinus ihres halben Unterschieds der Coefficient der Kugel.

8. Wird in (6) $\varrho'=\varrho''=\varrho$ gesetzt, so erhält man einen Kugelcylinder, dessen Axe durch den Kegelmittelpunkt geht, und es wird

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\varrho^3).\mathfrak{K}.$$

Der Kugelcylinder ist daher gleich der Kugel multiplicirt mit der Ergänzung der dritten Potenz des Cosinus vom Grundflächenradius zu 1.

Wird aus der Kugel ein Kugelcylinder herausgeschnitten, dessen Grundflächenradius $=60^0$ ist, so ist die so ausgehöhlte Kugel acht mal so klein als die Kugel selbst.

9. Macht man dagegen in (7) $\varrho'=\varrho''=\varrho$, so entsteht ein Kugelkegelstumpf, dessen Seiten einander im Mittelpunkte der Kugel halbiren und es ist dann

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\varrho)\mathfrak{K}=2\sin\tfrac{1}{2}\varrho^2.\mathfrak{K}.$$

Die auf solche Weise ausgehöhlte Kugel ist demnach der mit dem Cosinus des Grundflächenhalbmessers multiplicirten Kugel gleich. Vergl. (4.)

Für $\varrho=60^0$ sind also beide Körper einander gleich.



10. Setzt man $\varrho''=0$, so entsteht ein Kugelkegel, dessen Spitze im Gegenpunkte des Mittelpunkts von G' liegt. Hiernach wird

$$\mathfrak{C}=(1-\cos\frac{1}{2}\varrho^4).\mathfrak{K}=\frac{1}{4}(1-\cos\varrho)(3+\cos\varrho).\mathfrak{K}.$$

Für $\varrho=90^0$ wird $\mathfrak{C}=\frac{3}{4}\mathfrak{K}$, für $\varrho=60^0$ wird $\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\frac{3}{4}\pi r^3$.

11. Wenn in (6) die Seitenkante des Kegelstumpfs mit $2s$ bezeichnet wird, so ergiebt sich leicht, dass

$$4s^2=2r^2(1+\cos(\varrho'+\varrho'')),$$

oder

$$s=r\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')$$

ist.

Die Verbindung dieser Gleichung mit

$$\mathfrak{C}=\{1-\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')^3\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')\}.\frac{4}{3}\pi r^3$$

giebt

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=4\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').\frac{1}{3}r.\pi s^2.$$

Es ist daher der ausgehöhlte Körper einem Kegel gleich, welcher die Seitenkante des Stumpfes zum Grundflächendurchmesser und den Kugelradius zur Höhe hat, wenn man diesen Kegel mit dem vierfachen Producte der Cosinus der halben Summe und der halben Differenz der Grundflächenhalbmesser multiplicirt.

Da

$$2\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')\cos\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')=\cos\varrho'+\cos\varrho''$$

und

$$r\cos\varrho'+r\cos\varrho''$$

gleich der mit a zu bezeichnenden Höhe des Kegelstumpfs mit ebenen Grundflächen ist, so hat man auch

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=2.\frac{1}{3}a.\pi s^2.$$

Darnach ist die konisch ausgehöhlte Kugel doppelt so gross als ein gewöhnlicher Kegel, welcher die Seitenkante des Stumpfes zum Durchmesser der Grundfläche und den Abstand beider Kreisebenen zur Höhe hat.

12. Geht der Stumpf in einen Kugelcylinder über, so wird in (11) ... $a=2s$ und man erhält

$$\mathfrak{K}-\mathfrak{C}=\frac{4}{3}\pi s^3.$$

Die cylindrisch ausgehöhlte Kugel ist also einer Kugel gleich, welche die Seitenkante des Cylinders zum Durchmesser hat.

13. Es bleiben jetzt noch die beiden Ergänzungskegel des Kugelkegelstumpfs zu betrachten, welche entstehen, wenn der Mantel des letztern bis zum Durchschnittspunkte erweitert wird, und von denen der erste $\mathfrak{C}'$ den convexen Kugelkreis G', der andere $\mathfrak{C}''$ den concaven G'' zur Grundfläche hat.

Die zugehörigen Kegel mit ebenen Grundflächen G_1, G_{11} seien $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_{11}$ und ihre Höhen a_1, a_{11}, folglich $a_1-a_{11}=a$. Vergl. (11.).

Dann ist

$$a=(\cos\varrho'+\cos\varrho'')r$$

und die Halbmesser von G_1, G_{11} $=r\sin\varrho'$, $r\sin\varrho''$ und man erhält

$$a_1=\frac{\cos\varrho'+\cos\varrho''}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}\cdot r\sin\varrho'=\sin\varrho'\cot\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').r\,,$$

$$a_{11}=\frac{\cos\varrho'+\cos\varrho''}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}\cdot r\sin\varrho''=\sin\varrho''\cot\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').r\,.$$

Daher sind die ebengrundflächigen Ergänzungskegel

$$\mathfrak{C}_1=\frac{1}{3}\pi r^3\sin\varrho'^3\cot\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho''),$$

$$\mathfrak{C}_{11}=\frac{1}{3}\pi r^3\sin\varrho''^3\cot\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'').$$

Wird $\mathfrak{C}_1$ um den Kugelabschnitt $\mathfrak{A}'$ vermehrt und $\mathfrak{C}_{11}$ und $\mathfrak{A}''$ vermindert, so erhält man die gesuchten Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ und es ist, wenn man (5) benutzt, und beiderseits durch $\frac{1}{3}\pi r^3$ dividirt:

$$\frac{3}{\pi r^3}\cdot\mathfrak{C}'=\frac{\cos\varrho'+\cos\varrho''}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}\cdot\sin\varrho'^3+4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2-\sin\varrho'^2\cos\varrho'.$$

Wird rechts das dritte Glied auf den Nenner des ersten gebracht, so erhält man

$$\frac{3}{\pi r^3}\ \mathfrak{C}=\frac{\sin(\varrho'+\varrho'')}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}.\sin\varrho'^2+4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2,$$

und durch eine leichte Umformung des Coefficienten von $\sin\varrho'^2$:

$$\frac{3}{\pi r^3}.\mathfrak{C}'=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}.\sin\varrho'^2+4\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2.$$

Daher, wenn man noch $\sin\varrho'^2$ verwandelt:

$$\mathfrak{C}'=\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2\Big\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cos\frac{1}{2}\varrho'^2+1\Big\}.\mathfrak{K},$$

$$\mathfrak{C}''=\sin\tfrac{1}{2}\varrho''^2\Big\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cos\frac{1}{2}\varrho''^2-1\Big\}.\mathfrak{K}.$$

Wenn man den Sinus der halben Summe der Grundflächenhalbmesser durch den Sinus ihres halben Unterschieds dividirt, so erhält man, für die Kugel als Einheit, den Inhalt jedes der beiden Ergänzungskegel, wenn man jenen Quotienten mit dem Quadrate des Cosinus der Hälfte des zugehörigen Radius multiplicirt und dieses um 1 vermehrte oder verminderte Product mit dem Quadrate des Sinus der Hälfte desselben Radius multiplicirt.

14. Wird in (13) . . ϱ'' negativ genommen, so erhält man das andere zu denselben Grundflächen gehörige Paar von Kugelkegeln, wodurch sich hier bloss der Quotient beider Sinus umkehrt.

15. Da nach (4) $\sin\frac{1}{2}\varrho^2.\mathfrak{K}$ den Inhalt eines Kugelkegels giebt, welcher ϱ zum Grundflächenhalbmesser und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat: so werden, wenn man in (13) die erste Endgleichung um $\sin\frac{1}{2}\varrho'^2.\mathfrak{K}$ vermindert, die zweite aber um $\sin\frac{1}{2}\varrho''^2.\mathfrak{K}$ vermehrt, zwei Doppelkegel ϑ', ϑ'' entstehen, deren gemeinschaftliche Spitzen der Kegelmittelpunkt und die Spitze der Ergänzungskegel sind und welche beziehungsweise die Peripherie von G', G'' zur Randkante haben.

Der Inhalt derselben ist

$$\vartheta'=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\sin\varrho'^2.\mathfrak{K},$$

$$\vartheta''=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\sin\varrho''^2.\mathfrak{K}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta''}=\frac{\sin\varrho'^2}{\sin\varrho''^2}.$$

Es verhalten sich daher diese Doppelkegel wie die Quadrate der Sinus der sphärischen Halbmesser, mit denen ihre Kanten beschrieben worden.

Das andere Paar von Doppelkegeln wird eben so behandelt.

16. Ergänzen die sphärischen Halbmesser ϱ', ϱ'' der Grundflächen der Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ einander zu 180^0, so wird die *äussere* konische Fläche eine *Berührungsfläche* an die Kugel, und man erhält alsdann, nachdem die Endgleichungen in (13) durch $\mathfrak{K}$ dividirt worden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{K}}=\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2\left\{\frac{1}{-\cos\varrho'}\cdot\cos\frac{1}{2}\varrho'^2+1\right\}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}\varrho'^2.\frac{\cos\frac{1}{2}\varrho'^2-\cos\varrho'}{-\cos\varrho'},$$

und wenn man im Zähler $\cos\varrho'$ durch $\cos\frac{1}{2}\varrho'^2-\sin\frac{1}{2}\varrho'^2$ ersetzt,

$$\mathfrak{C}=-\frac{\sin\frac{1}{2}\varrho'^4}{\cos\varrho'}\cdot\mathfrak{K},$$

$$\mathfrak{C}''=-\frac{\cos\frac{1}{2}\varrho'^4}{\cos\varrho'}\cdot\mathfrak{K}.$$

In diesem Falle muss $\mathfrak{C}'-\mathfrak{C}''=\mathfrak{K}$ sein.

17. Für die *innern* Kegel geht, wenn $\varrho'+\varrho''=180^0$ wird, die konische Fläche in eine *Ebene* über und die Kugelkegel werden zu *Kugelabschnitten*, deren *Summe* der Kugel gleich ist.

18. Werden die *Axen* der Kugelkegel $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ mit a', a'' bezeichnet, so erhält man aus (12) und (4) für die *äussern* Kegel:

$$\frac{a'}{r}=\frac{\cos\varrho'+\cos\varrho''}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}\sin\varrho'+1-\cos\varrho'$$

$$=\frac{\sin(\varrho'+\varrho'')+\sin\varrho'-\sin\varrho''}{\sin\varrho'-\sin\varrho''}.$$

$$a'=2.\frac{\sin\frac{1}{2}\varrho'\cos\frac{1}{2}\varrho''}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r,$$

$$a''=2.\frac{\cos\frac{1}{2}\varrho'\sin\frac{1}{2}\varrho''}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r.$$

19. Ist p die Spitze des äussern und q die des innern Kugelkegelpaares, sowie o der Mittelpunkt der Kugel, so ist op$=b$ die gemeinschaftliche Axe der Doppelkegel ϑ', ϑ'', und man hat $b=a'-r=a''+r$. Daher ist aus (18) nach einer leichten Umformung

$$b=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}\cdot r,$$

und für oq$=c$

$$c=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}\cdot r,$$

woraus die geometrische Bedeutung der in (13) und (15) vorkommenden Sinusquotienten hervorgeht.

Auch folgt augenblicklich aus diesen beiden Gleichungen,

dass das Rechteck aus den Axen op, oq der beiden Doppelkegelpaare gleich dem Quadrate des Kugelhalbmessers ist.

20. Endlich sind noch die *Seitenkanten* $2s'$, $2s''$ der äussern Ergänzungskegel zu bestimmen. Sie ergeben sich leicht, wenn man sich erinnert, dass in (11)

$$s=r\cos\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')$$

war. Man erhält nämlich für die

äussern	innern
Ergänzungskegel	
$s'=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r$	$s'=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}r,$
$s''=\frac{\sin\varrho}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'-\varrho'')}r$	$s''=\frac{\sin\varrho'}{\sin\frac{1}{2}(\varrho'+\varrho'')}r;$

aus deren Verbindung sich wiederum die in (19) vorkommenden Sinusquotienten ergeben.

Diese einfachen Beziehungen zwischen einem konischen Raume und der Kugel, deren Zahl sich leicht vermehren liesse, bedürfen zu ihrer Herleitung bloss der Bekanntschaft mit den Elementen der Stereometrie und der Goniometrie und eignen sich dadurch zu in sich zusammenhängenden Uebungen, ähnlich den in den „*Geometrischen Ausläufern*" von mir zusammengestellten. Mit dieser Bemerkung möge die Mittheilung dieser Kleinigkeit gerechtfertigt sein.

XLIII.

Ueber die Bestimmung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

(Nach Abel Transon, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Février et Mars 1850.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

Seien $F(x)$, $\varphi(x)$ ganze Funktionen von x; a, b, c,..... die (n) Wurzeln der Gleichung

$$F(x)=0, \qquad (1)$$

so ist bekanntlich

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\ldots\ldots \quad (2)$$

Multiplicirt man nun beiderseitig mit $\varphi(x)$, so erhält man

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{x-b}+\ldots.=f(x)+\frac{\varphi(a)}{x-a}+\frac{\varphi(b)}{x-b}+\ldots\ldots,$$

wenn man (falls diess thunlich ist), $\varphi(x)$ durch $x-a$, $x-b$ u. s. w. dividirt, bei welcher Division die Reste bekanntlich $\varphi(a)$, $\varphi(b)$,..... sind, so dass $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist, um einen Grad niedriger als $\varphi(x)$. Bringt man die zweite Seite auf einerlei Nenner, so ist

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = f(x) + \frac{x^{n-1}\Sigma\varphi(a) + \ldots..}{F(x)}, \qquad (3)$$

wenn Σ bedeutet, man solle die Operation auf alle Wurzeln a, b,..... ausdehnen, also z. B.

$$\Sigma\varphi(a) = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \ldots.. \qquad (4)$$

ist. Daraus folgt offenbar, dass man die symmetrische Funktion (4) erhält, wenn man $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt und den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ nimmt.

Da man hat

$$F(x) = 0, \qquad (1)$$

so kann man hierdurch x^n ausdrücken vermittelst der niederern Potenzen von x, so also dass etwa

$$x^n = -p_1x^{n-1} - p_2x^{n-2} - \ldots.; \quad (5)$$

ebenso kann man x^{n+1}, x^{n+2},.... ausdrücken durch Potenzen von x, niederer als die $n$te. Z. B. aus (5) folgt

$$x^{n+1} = -p_1x^n - p_2x^{n-1} - \ldots;$$

setzt man hier für x^n seinen Werth (5), so erhält man den verlangten Ausdruck von x^{n+1}.

In dieser Weise kann man überhaupt vorläufig die Grösse $F'(x)\varphi(x)$ durch niederere Potenzen von x ausdrücken, als die $n$te, und man wird etwa erhalten:

$$F'(x)\varphi(x) = h_1x^{n-1} + h_2x^{n-2} + \ldots... \qquad (6)$$

Hat man diess gethan, so ist in (3) offenbar $f(x)=0$ und man hat:

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \ldots... = h_1. \qquad (7)$$

Vermittelst der gelehrten Methoden wird man also immer die symmetrische Funktion

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \ldots.. \qquad (4)$$

der Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ ausdrücken können.

§. 2.

Gesetzt nun, es handele sich um die symmetrische Funktion zweier Buchstaben

$$\Sigma\varphi(a, b),$$

die man durch

$$\Sigma\varphi(x, y) \qquad (8)$$

darstellen kann, wobei bemerkt werden muss, dass Σ bedeutet, x, y sollten alle Werthe annehmen (§. 1.), oder alle Verbindungen dieser Werthe zu zwei.

Man dividire nun zunächst $F(x)$ durch $x-a$, und sei $F_1(x)$ der Quotient, so dass $b, c, \ldots. l$ die $(n-1)$ Wurzeln der Gleichung $F_1(x)=0$ sind. Aus §. 1. folgt nun, dass der Koeffizient von $\frac{1}{z}$. in der Entwickelung von

$$\frac{F'_1(z).\varphi(a, z)}{F_1(z)}$$

die Summe

$$\varphi(a, b)+\varphi(a, c)+\ldots\ldots.+\varphi(a, l)$$

ist. Stellt man nun diesen Koeffizienten durch $\psi(a)$ dar, so ist

$$\Sigma\varphi(x, y)=\psi(a)+\psi(b)+\psi(c)+\ldots..+\psi(l),$$

und man wird die verlangte symmetrische Funktion durch Entwickelung des Ausdrucks $\frac{F'(z).\psi(z)}{F(z)}$ finden.

§. 3.

Man habe die symmetrische Funktion dreier Buchstaben

$$\Sigma\varphi(y, z, v),$$

so wird man zuerst das Polynom

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)}=F_2(x)$$

bilden. Sucht man nun den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von

$$\frac{F_2'(x)\varphi(a, b, x)}{F_2(x)},$$

so ist derselbe gleich

$$\varphi(a, b, c)+\varphi(a, b, d)+\ldots.\varphi(a, b, l)=\psi(a, b),$$

so dass man die symmetrische Funktion $\Sigma\psi(y, z)$ zu berechnen hat, was nach §. 2. geschieht.

Dass man so fortfahren kann, ist klar.

Dass es hinreichend ist, ganze Funktionen zu betrachten, ist leicht einzusehen, da eine jede nicht ganze rationale Funktion der Quotient zweier ganzen ist, und zugleich auch jede rationale Funktion einer oder mehrerer Wurzeln einer Gleichung ersetzt werden kann durch eine ganze Funktion dieser Wurzeln. (**Serret**, Cours d'Algèbre superieure 2me leçon pag. 19. suiv.).

§. 4.

Man sieht leicht aus dem Vorstehenden, dass jede symmetrische ganze Funktion der Wurzeln einer Gleichung eine ganze Funktion der Koeffizienten, ohne irgend einen numerischen Divisor ist; so wie dass man sie durch algebraische Divisionen erhält, bei denen der Koeffizient des ersten Gliedes in den Divisoren immer der Einheit gleich ist. Besonders geht die erste Behauptung klar aus der zweiten Methode des §. 1. hervor.

§. 5.

Sei

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0 \qquad (9)$$

die gegebene Gleichung ($F(x)=0$), also $p_1, p_2, \dots$ deren Koeffizienten mit den Zeigern 1, 2,..m. Denken wir uns nun irgend ein Produkt solcher Koeffizienten, so heissen wir den Zeiger desselben die Summe der einzelnen Zeiger, indem man Sorge trägt, den Zeiger eines Buchstabens so viel mal zu zählen, als dieser Buchstabe vorkommt. So ist z.B. der Zeiger des Produkts $p_1^3 p_2^4 p_5$

$$= 3.1 + 4.2 + 5 = 16.$$

Besteht eine Funktion aus mehrern solcher Produkte, so heisst der höchste Zeiger der einzelnen Glieder der Zeiger der Funktion. So ist also von

$$p_1^2 p_3 + p_2^4 p_3^5 + p_6 p_2 + p_1 p_2 p_3$$

der Zeiger 23.

Man habe nun eine symmetrische Funktion einer oder mehrerer Wurzeln der Gleichung (9), so heisst der höchste Grad derselben die höchste Summe der Exponenten der einzelnen Glieder. Ist diese Funktion nun durch die Koeffizienten von (9) ausgedrückt, so hat sie einen gewissen Zeiger und man kann nun nachweisen, dass der Zeiger einer symmetrischen Funktion ihrem Grade gleich ist.

In Bezug auf die symmetrischen Funktionen eines Buchstabens genügt es, den Beweis zu liefern für die Funktion ΣAx^n, wo A eine Zahl ist. Um diese Funktion zu erhalten, muss man dividiren (§. 1.):

$$\frac{Amx^{m-1+n}+A(m-1)p_1x^{m-2+n}+\ldots\ldots}{x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots}.$$

Sei der Quotient

$$q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots\ldots+q_rx^{n-r-1}+\ldots.,$$

so ist

$$q_r=-p_1q_{r-1}-p_2q_{r-2}-\ldots\ldots-p_rq_0+(m-r)Ap_r.$$

Da aber $q_0=Am$, also den Zeiger 0 hat, so hat allgemein q_r den Zeiger r. So demnach hat der Koeffizient von $\frac{1}{x}$, d. i. q_n, den Zeiger n, was den Satz beweist.

Wäre A selbst eine ganze, rationale Funktion der Buchstaben p, so hätte q_0 denselben Zeiger n' wie A, also q_n $(A\Sigma x^n)$ den Zeiger $n'+n$.

In Bezug auf die Funktionen zweier Buchstaben genügt es, die Funktion $\Sigma y^n z^{n'}$ zu betrachten.

Heisst man die zweite Art, in §. 1. aufgeführt, die durch Reduktion, so dass wir also unter Reduktion der Funktion $F'(x)\varphi(x)$ verstehen die Operation, vermöge der alle Potenzen von x die höher als die $(n-1)$te sind, durch niederere ausgedrückt werden, vermittelst der Gleichung $F(x)=0$, so erhält man $\Sigma y^n z^{n'}$, (§. 2.), wenn man zuerst die Reduktion der Funktion $a^n x^{n'} F_1'(x)$ vermittelst der Gleichung $F_1(x)=0$ vornimmt. Da aber

$$F_1(x)=x^{m-1}+\left.\begin{array}{r}a\\+p_1\end{array}\right|x^{m-2}+\left.\begin{array}{r}a^2\\+p_1a\\+p_2\end{array}\right|x^{m-3}+\ldots\ldots,$$

so ist klar, dass man hierdurch eine Funktion $\psi(a)$ erhalten wird, so dass in jedem ihrer Glieder der Grad von a mit dem Zeiger des Buchstabens p die Summe $n+n'$ beträgt, so dass die Reduktion, die darauf folgt, nämlich der Grösse $\psi(x)\,F'(x)$, vermittelst $F(x)=0$, eine Funktion vom Zeiger $n+n'$ giebt.

So kann man leicht fortfahren.

Wenn man eine allgemeine Gleichung vom $m$ten Grade mit zwei Unbekannten x und y hat, so geben die Zeiger der Koeffizienten von x zugleich den Grad derselben in y an. Der vorangegangene Lehrsatz lehrt somit den Grad in y einer jeden symmetrischen Funktion der Wurzeln x_1, x_2, ... x_m kennen.

Eben so dient dieser Satz auch zu Abkürzungen der in den ersten Paragraphen angegebenen Rechnungen.

§. 6.

Sei n der Grad der symmetrischen Funktion, m der von $F(x)$. Wenn $n < m$, so kann man in $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ u. s. f., eben so in $F'(x)$, $F'_1(x)$, $F'_2(x)$ u. s. w. alle Koeffizienten weglassen, deren Zeiger höher als n ist, was unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatze folgt.

Ganz eben so wie in §. 1. kann man leicht folgende Sätze beweisen:

Die Summe der Werthe, welche die ganze Funktion $a\varphi(b)$ erhält, wenn man darin a und b durch alle Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ ersetzt, zu je zwei auf alle möglichen Arten verbunden, ist gleich dem mit verkehrtem Zeichen genommenen zweiten Gliede des Restes in der Division $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$. Dessgleichen ist $\Sigma ab\varphi(c)$ gleich dem mit verkehrtem Zeichen genommenen dritten Gliede; $\Sigma abc\varphi(d)$ gleich dem eben so genommenen vierten Gliede u. s. w., was aus (3) unmittelbar hervorgeht.

§. 7.

Man verlange die Bestimmung von $\Sigma(ab^2)$.

Nach §. 6. ist hier bloss eine Division nothwendig. Sei $F(x)=0$ die Gleichung:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m = 0,$$

so wird man nur auf die vier ersten Glieder achten müssen. (§. 6. erster Satz.). Es genügt also, den Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ in der Entwicklung von

$$\frac{F'(x).x^2}{F(x)}$$

$$= \frac{[mx^{m-1} + (m-1)p_1 x^{m-2} + (m-2)p_2 x^{m-3} + (m-3)p_3 x^{m-4}]\, x^2}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3}}$$

$$= \frac{mx^4 + (m-1)p_1 x^3 + (m-2)p_2 x^2 + (m-3)p_3 x}{x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3}$$

zu bestimmen

$$mx^4+(m-1)p_1x^3+\left.\begin{array}{c}(m-2)p_2\\+p_1^2\end{array}\right|x^2+\begin{array}{c}(m-3)p_3\\+p_1p_2\end{array}x\;\left|\,\frac{x^3+p_1x^2+p_2x+p_3}{mx-p_1}\right..$$

Demnach ist das zweite Glied des Restes $-3p_3+p_1p_2$, also

$$\Sigma ab^2=3p_3-p_1p_2.$$

XLIV.

Ueber die Schwingungsdauer des einfachen und des zusammengesetzten Pendels.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Schwingt ein einfaches Pendel (Taf. IX. Fig. 7.) von der Länge $l=CA$, ist CB eine Vertikale, CA die anfängliche Lage, von der aus das Pendel ohne Anfangsgeschwindigkeit geht, CM die Lage am Ende der Zeit t, $MCB=\varphi$, $ACB=\alpha$, so findet man t nach der Formel:

$$t=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\alpha^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}, \tag{1}$$

(man sehe z. B. Poisson Mechanik §. 182.).

Setzt man hier $\cos\varphi=1-x$, $\cos\alpha=1-\beta$, also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}},$$

so ergiebt sich:

$$t=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\beta}^{x}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}. \qquad (2)$$

Um hieraus die Zeit T zu finden, welche der Körper braucht, um nach B zu kommen, hat man bloss $\varphi=0$ zu setzen. Demnach

$$T=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\beta}^{0}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\beta}\frac{\partial x}{\sqrt{x(\beta-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}.$$

Man setze in dieser Formel $x=\beta y$, so giebt sie:

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{1}\frac{\partial y}{\sqrt{y(1-y)(1-\frac{\beta}{2}y)}},$$

und trifft somit zusammen mit der im Archiv. Theil XIII. S. 5. §. 15. I. aufgestellten Formel, wenn dort

$$m^2=\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \text{also} \quad m=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

ist. Da

$$T\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\partial y}{\sqrt{y(1-y)(1-\frac{\beta}{2}y)}},$$

so folgt aus jener Formel, dass

$$\left(\operatorname{sn} T\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2=1, \quad \operatorname{sn}\left(T\sqrt{\frac{g}{l}}\right)=+1;$$

also

$$T\sqrt{\frac{g}{l}}=M, \quad T=M\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (4)$$

wenn M der zu $m=\sin\frac{\alpha}{2}$ gehörige Modularquadrant ist (Archiv. Theil XI. S. 400. §. 3. (5)). Für $\alpha=0$ oder $m=0$ ist $M=\frac{\pi}{2}$,

was die bekannte Formel für die Schwingungen des einfachen Pendels ist.

Ein **zusammengesetztes Pendel** schwingt bekanntlich genau wie ein einfaches von der Länge $\frac{K}{SR}$, wenn K das Trägheitsmoment des Körpers, S dessen Masse und R die Entfernung des Schwerpunkts von der Aufhängaxe ist. Die Schwingungsdauer T ist also

$$T=M\sqrt{\frac{K}{SRg}}. \qquad (5)$$

Hier ist α der anfängliche Winkel, den die Linie R mit der Vertikalen machte. Es dürfte vielleicht nicht ohne Interesse sein, diesen letztern Satz auf elementare Weise abzuleiten.

Es stelle PQ (Taf. IX. Fig. 8.) ein zusammengesetztes Pendel vor, das sich um eine horizontale Axe AB dreht. G sei sein Schwerpunkt, P sein Gewicht. Die Senkrechte GC auf AB heisse R. Man wird sich nun das Gesammtgewicht des Körpers in G vereinigt denken können, so dass in G die vertikale Kraft P angreift. Diese zerlege man in zwei, eine nach GC, die andere senkrecht auf GC gerichtet. Die erstere trägt zur Umdrehung des Pendels Nichts bei; die letztere ist $P\sin\varphi$, wenn φ der Winkel ist, den R mit der Vertikalen macht. Die Umdrehung um die Axe AB geschieht folglich durch ein wirksames Kräftepaar, dessen Moment

$$PR\sin\varphi \qquad (6)$$

ist.

Sei nun a irgend ein Element (Atom, Punkt) des Körpers, dessen Gewicht p ist; sei ferner, in der wirklich stattfindenden Lage, γ die Winkelgeschwindigkeit des Pendels um AB', ψ' ihre Beschleunigung, so sind $r\gamma$, $r\psi$ die Geschwindigkeit und ihre Beschleunigung für den Punkt p, wenn dessen (senkrechte) Entfernung von der Axe AB gleich r ist. Hat aber p die Beschleunigung $r\psi$, so wirkt auf dieses Element, in der Richtung der Bewegung, also senkrecht auf r, die Kraft $\frac{pr\psi}{g}$ *), d. h. ein drehendes Paar, dessen Moment

$$\frac{pr\psi}{g}.r=\frac{pr^2\psi}{g}$$

---

*) Diese Formel ist immer leicht abzuleiten. Denn wirkt auf das Gewicht P die beständige Kraft Q, so ist die Beschleunigung $x=\frac{Qg}{P}$, nach der Formel $P:g=Q:x$. Hier ist $P=p$, $x=r\psi$, also

$$r\psi=\frac{Qg}{p},\ Q=\frac{pr\psi}{g}.$$

ist. Da alle Punkte, über oder unter der Axe, in gleicher Richtung drehen, so kann man alle diese Paare, die in parallelen, auf AB senkrechten Ebenen wirken, in ein einziges zusammensetzen, dessen Moment

$$S\left(\frac{pr^2\psi}{g}\right)=\frac{\psi}{g}S(pr^2), \qquad (7)$$

wenn $S(pr^2)$ bedeutet, dass die Grössen pr^2, auf alle Punkte des Körpers bezogen, addirt werden sollen, und welches Paar in einer auf AB senkrechten Ebene wirkt. Dieses letzte Paar muss vorhanden sein, wenn die Beschleunigung ψ statt haben soll. Wirklich vorhanden ist das Paar (6), das in einer auf AB senkrechten Ebene wirkt. Daraus folgt, dass ψ so beschaffen sein muss, dass

$$\frac{\psi}{g}S(pr^2)=PR\sin\varphi,$$

$$\psi=g\frac{PR\sin\varphi}{S(pr^2)}. \qquad (8)$$

Denken wir uns nun, der Körper PQ stelle ein einfaches Pendel von der Länge l und dem Gewichte Q dar, so ist offenbar in (8):

$$R=l,\quad P=Q,\quad S(pr^2)=QR^2$$

zu setzen, und die entsprechende Beschleunigung ψ' findet sich:

$$\psi'=g\frac{QR\sin\varphi}{QR^2}=g\frac{\sin\varphi}{l}. \qquad (9)$$

Sollen nun das einfache und das zusammengesetzte Pendel in dieser (φ entsprechenden) Lage gleiche Bewegung haben, so muss $\psi=\psi'$, d. h.

$$g\frac{PR\sin\varphi}{S(pr^2)}=\frac{g\sin\varphi}{l},\quad l=\frac{S(pr^2)}{PR} \qquad (10)$$

sein. Da hier φ nicht mehr vorkommt, so gilt es unabhängig von φ, d. h. das einfache Pendel von der Länge $\frac{S(pr^2)}{PR}$ hat genau dieselbe Bewegung, wie das zusammengesetzte. Bekanntlich heisst $\frac{P}{g}$ die Masse des Körpers; ist sie $=S$, so ist $P=Sg$, und wenn K das Trägheitsmoment, so ist $S(pr^2)=gK$, also

$$l=\frac{K}{SR}.$$

Heisst K' das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, mit AB parallele Axe, so ist, wie leicht abzuleiten:

$$K = K' + R^2 S,$$

also

$$l = \frac{K'}{SR} + R.$$

Nach dem Vorgang von Coriolis (Berechnung des Effekts der Maschinen) wäre es zweckmässiger, die Summe $S(pr^2)$ geradezu als Trägheitsmoment K zu bezeichnen, so dass dann

$$l = \frac{K}{PR}, \qquad (11)$$

und

$$K = K' + R^2 P, \quad l = \frac{K'}{PR} + R. \quad (12)$$

Weitere Entwickelungen hiervon zu geben, liegt jetzt nicht in meiner Absicht; ohnehin ist es nicht schwer, die Theorie des Reversionspendels aus der letzten Gleichung abzuleiten, was ganz elementar geschehen kann, wie ich diess auch immer beim Unterricht thue. Die Formel (5) ist somit, unter der letzten Annahme:

$$T = M\sqrt{\frac{K' + R^2 P}{PRg}} = \sqrt{\frac{K'}{PRg} + \frac{R}{g}}, \qquad (5)$$

worin also T die Zeit bedeutet, die verfliesst, während die Linie $GC(R)$ von ihrer äussersten Lage, wo sie den Winkel α mit der Vertikalen machte, zur vertikalen Lage geht. Was den Werth von M betrifft, so ist für:

$\alpha = 0$,	$M = \frac{\pi}{2}$,	$\alpha = 22^\circ$,	$M = 1{,}58539$.
$\alpha = 2^\circ$,	$M = 1{,}57091$.	$\alpha = 24^\circ$,	$M = 1{,}58819$.
$\alpha = 4^\circ$,	$M = 1{,}57127$.	$\alpha = 26^\circ$,	$M = 1{,}59125$.
$\alpha = 6^\circ$,	$M = 1{,}57187$.	$\alpha = 28^\circ$,	$M = 1{,}59456$.
$\alpha = 8^\circ$,	$M = 1{,}57271$.	$\alpha = 30^\circ$,	$M = 1{,}59814$.
$\alpha = 10^\circ$,	$M = 1{,}57379$.	$\alpha = 32^\circ$,	$M = 1{,}60197$.
$\alpha = 12^\circ$,	$M = 1{,}57511$.	$\alpha = 34^\circ$,	$M = 1{,}60608$.
$\alpha = 14^\circ$,	$M = 1{,}57667$.	$\alpha = 36^\circ$,	$M = 1{,}61045$.
$\alpha = 16^\circ$,	$M = 1{,}57848$.	$\alpha = 38^\circ$,	$M = 1{,}61509$.
$\alpha = 18^\circ$,	$M = 1{,}58054$.	$\alpha = 40^\circ$,	$M = 1{,}62002$.
$\alpha = 20^\circ$,	$M = 1{,}58284$	u. s. w.	

XLV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

1.

Sei O (Taf. IX. Fig. 9.) die Spitze einer Parabel, OC deren Axe und ihre Gleichung:

$$y^2=px.$$

Man mache $OC=OD=\frac{p}{4}$, ziehe an irgend einen Punkt C der Parabel die Linien DE, CE, so ist

$$DE^2+\frac{p^2}{4}=CE(p+CE).$$

Wäre allgemeiner $OC=OD=e$, so hätte man:

$$DE^2-\left(\frac{DE^2-CE^2+4e^2}{4e}\right)^2=\frac{p}{4e}(DE^2-CE^2).$$

2.

Sei in Taf. IX. Fig. 10. $OA=OB=e$, man mache $OD=\varepsilon e$ (worin ε willkührlich, ganz oder gebrochen), ziehe um D mit dem (beliebigen) Halbmesser r einen Kreis; an einen Punkt F in dessen Umfang ziehe man die Linien AF und BF, so ist:

$$AF^2+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}BF^2=2\left(\frac{r^2+e^2(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon}\right),$$

oder wenn man lieber will:

$$(1+\varepsilon)AF^2+(1-\varepsilon)BF^2=2[r^2+e^2(1-\varepsilon^2)].$$

Für $\varepsilon=0$ ist D in O, und dann

$$AF^2+BF^2=2(r^2+e^2),$$

welcher Satz besonders leicht ausgesprochen werden kann.

Für $\varepsilon=1$ ist D in A, und dann:

$$AF^2=r^2,$$

wie natürlich.

XLVI.

Miscellen.

Bezeichnen a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks und e dessen sphärischen Excess, so ist immer

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}c^2\sin\tfrac{1}{2}e^2$$

$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a).$$

Diesen Satz hat Herr Armand Hue, Professeur d'Hydrographie à Bayonne, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome X. 1851. p. 25. auf folgende Art bewiesen.

Bekanntlich ist, wenn A, B, C wie gewöhnlich die Winkel des sphärischen Dreiecks bezeichnen,

$$e=A+B+C-180^0,$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}e=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

Entwickelt man

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

mittelst der bekannten Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}(a+b);$$

so kommt

$$\sin\frac{1}{2}e=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left\{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\right\},$$

also

$$\sin\frac{1}{2}e\cos\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C,$$

folglich

$$\sin\frac{1}{2}e^2\cos\frac{1}{2}c^2=\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\sin C^2.$$

Drückt man nun $\sin C^2$ in den Seiten des Dreiecks aus, so erhält man

$$\sin C^2=1-\cos C^2=1-\frac{(\cos c-\cos a\cos b)^2}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{(1-\cos a^2)(1-\cos b^2)-\cos c^2-\cos a^2\cos b^2+2\cos a\cos b\cos c}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{1+2\cos a\cos b\cos c-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2}{\sin a^2\sin b^2}$$

$$=\frac{4\cos a\cos b\cos c-\cos 2a-\cos 2b-\cos 2c-1}{32\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}b^2}.$$

Führt man diesen Ausdruck von $\sin C^2$ in die Gleichung

$$\sin\frac{1}{2}e^2\cos\frac{1}{2}c^2=\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}b^2\sin C^2$$

ein, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+32\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}b^2\cos\frac{1}{2}c^2\sin\frac{1}{2}e^2$$

$$=4\cos a\cos b\cos c=2\cos(a+b)\cos c+2\cos(a-b)\cos c$$

$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)+\cos(b+c-a),$$

welches der zu beweisende Satz war.

LXI.

Literarischer Bericht.

Geometrie.

Der Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen mathematischen Gesellschaft für 1850 enthält ausser den Notizen über die Schicksale der Gesellschaft einen recht interessanten Aufsatz von Herrn Conferenzrath Schumacher in Altona: „Ueber die geometrische Trisection des Winkels“, näherungsweise durch fortgesetztes Halbiren. Selbst für den Gebrauch als Uebung bei dem geometrischen, und, weil unendliche Reihen dabei in Anwendung kommen, auch bei dem arithmetischen Unterrichte auf Schulen, möchten wir diesen Aufsatz Lehrern der Mathematik zur Berücksichtigung anempfehlen. Die beigegebene sehr saubere Zeichnung ist von der bekannten höchst kunstgeübten Hand Herrn August Repsold's verfertigt.

Astronomie.

Aus C. L. von Littrow's Kalender für alle Stände. 1851., der bekanntlich immer viel Lehrreiches enthält, und zur weiteren Verbreitung nützlicher Kenntnisse sich sehr geeignet erweiset, ist ein kleines sehr hübsches Kärtchen über die Erscheinungen der am 28sten Juli 1851. eintretenden grossen Sonnenfinsterniss, welche in Europa, Asien und Amerika sichtbar sein wird, nebst einer zweckmässigen Erläuterung seines Gebrauchs, besonders abgedruckt erschienen. Wir machen alle Liebhaber der Astromie auf dieses Kärtchen aufmerksam, da jeder Beobachter der in Rede stehenden merkwürdigen Erscheinung, der nicht gerade genaue Rechnungen selbst anzustellen Willens ist, von diesem Kärtchen nebst seiner Erläuterung gewiss vortheilhaften Gebrauch machen wird. Die Linie der centralen Verfinsterung geht, um nur ein Paar grössere Städte zu erwähnen, nach diesem Kärtchen über Ostrolenka, zwischen Elbing in Westpreussen und Braunsberg in Ostpreussen hindurch, auch nicht weit von Danzig und Gothenburg in Schweden vorbei. Königsberg liegt noch in der Zone der totalen Verfinsterung, nicht weit von deren nördlicher Gränze, so wie auch Warschau noch innerhalb der Zone der totalen Verfinsterung nicht weit von deren südlicher Gränze liegt. Gerade auf der nördlichen Gränze der totalen Verfinsterung liegt

z. B. Goldapp in Ostpreussen. Dagegen gerade auf der südlichen Gränze der totalen Verfinsterung liegen z. B. Tarnopol, Lublin, Plock, Helsingborg. Zwar schon ausserhalb der Zone der totalen Verfinsterung, aber doch nicht weit von deren südlicher Gränze, liegen Thorn in Westpreussen, Bromberg im Grossherzogthum Posen, Coeslin in Hinterpommern, Ystadt und Malmoe in Schweden, Kopenhagen; etwas weiter von dieser Gränze Odessa und Lemberg. Für Greifswald wird noch ein sichelförmiges Stück der Sonne, dessen grösste Breite etwa $\frac{1}{36}$ des Durchmessers der Sonne beträgt, erleuchtet bleiben, oder die Verfinsterung wird hier etwa $11\frac{2}{3} = 11{,}7$ Zoll betragen. Der Anfang der Finsterniss wird hier in Greifswald etwa um $3^h. 4^m$ mittlerer Zeit eintreten; für Wien ist die Dauer der Finsterniss 2 Stunden 3 Minuten, und nimmt man nun den Längenunterschied zwischen Greifswald und Wien nach der Connaissance des temps. 1850. $2\frac{1}{2}$ Grad an, so ist, da Greifswald westlich von Wien liegt, für ersteren Ort die Dauer der Finsterniss 2 Stunden 3 Minuten plus $2\frac{1}{2} . \frac{3}{5}$ Minuten $=$ 2 Stunden 3 Minuten $+ 1\frac{1}{2}$ Min. $=$ 2 St. $4\frac{1}{2}$ Min., so dass also das Ende der Finsterniss in Greifswald etwa um $5^h. 8^m$, 5 mittlerer Zeit stattfinden wird. Man sieht aus diesem Beispiele, wie leicht man mittelst dieses Kärtchens die Hauptumstände der Finsterniss für seinen Wohnort im Voraus bestimmen kann, wenigstens mit einer Genauigkeit, die zur gehörigen Vorbereitung auf die Beobachtungen hinreichend ist. Herr von Littrow verdient daher für die Veröffentlichung dieses hübschen Kärtchens, auf das wir nochmals alle Liebhaber der Astronomie aufmerksam machen, den wärmsten Dank, und wird durch dasselbe der am 28. Juli nächsten Jahres zu erwartenden merkwürdigen Erscheinung gewiss viele Beobachter, die wenigstens mit einer guten Taschenuhr versehen sein müssen, gewinnen.

Physik.

Lehrgang der mechanischen Naturlehre für höhere Unterrichtsanstalten von Dr. G. Karsten, Professor der Physik an der Universität und an der Marineschule zu Kiel. Erste Abtheilung. Allgemeine Physik. Mit 6 Kupfertafeln. Kiel 1851. 8.

Wenn auch dieses Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten überhaupt bestimmt ist, so ist sein nächster Zweck doch der, auf der neugegründeten Seekadettenschule in Kiel dem physikalischen Unterrichte als Grundlage zu dienen. Deshalb hat der Herr Vf. mit vollem Rechte in Bezug auf Statik, Mechanik und Maschinenlehre den Kreis dieses Werkes bedeutend weiter gezogen, als dies sonst in physikalischen Lehrbüchern zu geschehen pflegt. Denn es enthält dieses Buch nicht bloss die Lehre von den sogenannten einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen ziemlich vollständig, sondern es sind auch alle übrigen Maschinen, welche auf Schiffen und bei'm Schiffbau Anwendung finden möchten, mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Vollständigkeit betrachtet worden, ohne mehr mathematische Kenntnisse, als die gewöhnlichsten Elementarlehren der reinen Mathe-

matik vorauszusetzen. Wenn wir aber auch in der Mechanik fester Körper das Buch für hinreichend vollständig halten, so scheint uns in der Hydrostatik und Hydrodynamik zu wenig gegeben zu sein. Denn was in §. 130. über die Lehre vom Metacentrum, welche ja für den Schiffbau rücksichtlich der Bestimmung der Stabilität oder Steife der Schiffe so unendlich wichtig ist, gesagt worden ist, halten wir in Bezug auf den Hauptzweck des Buchs doch in der That für zu wenig und zu ungenügend; und eben dasselbe gilt von §. 147., wo der Herr Vf. von dem Widerstande flüssiger Körper gegen in ihnen bewegte feste Körper handelt, von der ja auch eine Menge der wichtigsten nautischen Hauptlehren, z. B. die Lehre von der Abdrifft, die Lehre von der vortheilhaftesten Stellung der Seegel, die Lehre vom Seegelpunkte u. s. w. u. s. w. lediglich abhängen. Geben wir auch gern zu, dass sich rücksichtlich des Widerstandes der Herr Vf. in einiger Verlegenheit befunden haben mag, da diese Lehre allerdings noch auf sehr unsicheren Grundlagen beruhet, so durfte er doch diejenigen Sätze nicht unerwähnt lassen, die von den renommirtesten Lehrern der Schiffsbaukunst, z. B. von Chapman, Duhamel de Monceau, u. s. w. allgemein recipirt, und in der That keine anderen sind, als die, von denen schon Johann Bernoulli in der sehr schönen Schrift: „Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux. (Opera omnia. Tom. II. pag. 10.) ausging, und die auch später Leonhard Euler sowohl in der Scientia navalis, als auch in der Théorie de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux zur Grundlage seiner Untersuchungen machte. Auch hätte wohl hierbei des in der Geschichte des Schiffbau's merkwürdigen Streits zwischen Renau und Huygens (zugleich mit Beziehung auf den ältesten gründlicheren Schriftsteller über Schiffbau, den Pater Paul Hoste, Prof. de Math. à Toulon, dessen Théorie de la construction des vaisseaux 1697 in Fol. erschien), in welchem Johann Bernoulli zum Schiedsrichter angerufen wurde, mit einigen Worten gedacht werden können. Die für die Lehre von der Steife der Schiffe so wichtige Lehre vom Metacentrum beruht dagegen auf ganz sicheren theoretischen Grundlagen, und bedurfte ihrer grossen Bedeutung wegen auch selbst in einem physikalischen Lehrbuche, das für Schifffahrtsschulen bestimmt ist, jedenfalls einer etwas weiteren Ausführung, als ihr hier gegeben worden ist. Selbst rücksichtlich der Bestimmung des Deplacements enthält die Hydrostatik zu wenig, und über die Schiffs-Aichung (Jaugeage) vermissen wir auch Genügendes. Aber abgesehen hiervon, ist bei der jetzigen Sachlage immer schon viel gewonnen, wenn ein Buch, wie das vorliegende, dem physikalischen Unterrichte auf einer deutschen Schifffahrtsschule zum Grunde gelegt wird, weshalb wir dasselbe herzlich willkommen heissen, und dem Herrn Verf. für seine Herausgabe zu Dank verpflichtet sind. Vielleicht wird, was wir nicht wissen, auf der Marineschule in Kiel noch besonderer Unterricht in der Mechanik fester und flüssiger Körper ertheilt, wodurch die oben gerügte nur ganz oberflächliche Berührung mehrerer für den Schiffbau höchst wichtiger Lehren in diesem der Physik im Allgemeinen gewidmeten Lehrbuche vollständig gerechtfertigt erscheinen würde.

Nautik.

Anleitung zum Schiffbau von G. L. Uggla, königlichem Constructeur. Aus dem Schwedischen übersetzt und vermehrt mit einem Anhange, mehreren Tabellen und vier Tafeln Zeichnungen von Julius Prömmel, Schiffs-Architecten (zu Hamburg). Hamburg. 1850. 8°. 2 Thlr.

Der Inhalt dieses Buchs ist, sagt der Herr Vf., in der Hauptsache ein Auszug aus dem Tractat über den Schiffbau, mit Erläuterungen zur Architectura navalis mercatoria von F. H. von Chapman. Stockholm. 1775.*) Da das Werk von Chapman sehr deutlich, ohne grossen Aufwand mathematischer Kenntnisse verfasst, und aus langjähriger vielseitiger Praxis hervorgegangen ist (Chapman gilt in Schweden immer noch für den grössten Constructeur, und Schweden hat sich bekanntlich immer durch den Bau seiner Schiffe ausgezeichnet), so haben sich sowohl der Herr Verfasser durch die Herausgabe, als auch der Herr Uebersetzer durch die Uebertragung dieses Werkes auf deutschen Boden, um Jeden, der sich für den praktischen Schiffbau interessirt, jedenfalls ein Verdienst erworben. Der Inhalt ist folgender: Erklärung der verschiedenen Risse zu einem Schiffe (Seiten-Riss. Planten-Riss. Spanten-Riss u. s. w.). — Grundsätze des Schiffbaues. — Ueber die Lage des Gravitäts-Centrums des Schiffes, dessen Lufgierigkeit und Steife nebst Berechnung des Deplacements, des Gravitäts-Centrums und des Metacentrums. — Ueber das Segel-Areal, den Wirkungspunkt des Segelsystems und die Verhältnisse des Rundholzes. — Ueber die Stauung und Belastung. — Ueber das Areal des Ruders und dessen Breite. — Technische Benennungen der verschiedenen Hauptstücke, woraus ein Schiff zusammengesetzt ist, und ihre Verbindung unter einander (in zweckmässiger Kürze sehr belehrend, auch für Laien). — Ueber das Rundholz. — Der von dem Herrn Uebersetzer beigegebene Anhang ist vorzüglich durch die vielen vollständig ausgeführten numerischen Beispiele sehr instructiv. Möge dieses Werk zur allgemeinen Verbreitung richtiger theoretischer und praktischer Grundsätze über den Schiffbau unter den deutschen Schiffbaumeistern kräftigst beitragen!

(Vergl. auch vorher Physik.)

---

*) Wir bemerken, dass von der französischen Uebersetzung dieses Werks: Traité de la construction des vaisseaux etc. par F. H. de Chapman. Traduit du Suédois par M. Vial du Clairbois im Jahre 1839 eine mit einem neuen Titel versehene neue Ausgabe veranstaltet worden ist. Diese französische Uebersetzung scheint uns vorzüglich empfehlenswerth. Eine deutsche Uebersetzung ist, so viel wir wissen, nicht erschienen.

LXII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

Die Vorstellungen der alten Griechen und Römer über die Erde als Himmelskörper. Von Dr. Ludw. Oettinger, Grossh. Bad. Hofrathe und Prof. der Mathematik zu Freiburg i. B. Freiburg. 1850. 4.

Diese 116 Seiten starke Abhandlung enthält eine sehr interessante Zusammenstellung der Vorstellungen der Alten über die Erde als Himmelskörper, die wir den Lesern des Archivs zur Beachtung recht sehr empfehlen. Die Geschichte von der Gestalt der Erde ist bis in die neueste Zeit fortgeführt. Dem Alterthum gebührt das Verdienst, die Lehre von der Kugelgestalt festgestellt zu haben. Als eine Eigenthümlichkeit ist zu bemerken, dass von den späteren Schriftstellern (Cleomedes und Ptolemäus an den Orten, wo sie die Kugelgestalt behandeln) nicht mehr die runde Gestalt des Erdschattens bei Mondfinsternissen, welche Aristoteles aufführte, erwähnt wird. — Ort und Bewegung der Erde sind im Alterthum zwei zusammengehörige Begriffe. Nur wenige, weiter sehende Männer wussten sie zu sondern. Aus den gegebenen Mittheilungen geht aber ganz unzweideutig hervor, dass im Alterthum die Grundzüge des copernicanischen Systems ausgesprochen waren. — Auch die schiefe Stellung der Erdaxe gegen die Sphäre hatte man im Alterthum erkannt, aber nicht gegen die Erdbahn, also nicht in der Weise wie sie gegenwärtig erkannt ist. — Die Gradmessungen des Alterthums sind zwar nur als Versuche für die Grössenbestimmung der Erde zu betrachten, haben aber eine geschichtliche Bedeutung, denn die im Alterthum aufgefundenen Methoden bilden noch jetzt die

Grundlagen für die Grössenbestimmung der Erde durch Gradmessungen. — Durch die in dieser Abhandlung gegebenen Nachweisungen dürfte nun die Behauptung gerechtfertigt sein, dass diejenigen Unrecht thun, welche die Verdienste der Alten in Begründung der Astronomie als Wissenschaft zu entwerthen sich bemühen. — Ptolomäus schloss die Reihe der bedeutenderen Astronomen des Alterthums. Er scheint mehr mit beobachtendem, als mit schöpferischem Talente begabt gewesen zu sein, und es soll sofort seinem Verdienste nicht zu nahe getreten werden. Der Gedanke aber liegt sehr nahe, dass er Copernicus Stelle hätte einnehmen können, wenn er mit schöpferischem Geiste alle die Mittel erfasst hätte, welche ihm, wie wir aus seinen Werken sehen, seine Vorgänger als Vermächtniss hinterliessen, und wenn er sich von den Sinneneindrücken hätte losreissen können, von denen sich dieselben schon losgerissen hatten. Denn gerade er war es, welcher (Alm. Lib. I.) die Wahrheit der Sinneneindrücke den richtigern Ansichten anderer gegenüber zu begründen suchte.—

Dies sind etwa die von dem Herrn Vf. selbst in der Vorrede namhaft gemachten Hauptpunkte, welche in dieser interessanten und lehrreichen Schrift weiter ausgeführt werden.

Geometrie.

Geometrische Analysis. Eine systematische Anleitung zur Auflösung von Aufgaben aus der ebenen Geometrie auf rein geometrischem Wege, für die höhern Klassen der Gymnasien und Realschulen von Dr. Christian Heinrich Nagel, Rector der Realanstalt zu Ulm. Ulm. 1850. 8.

Wir begrüssen diese Anleitung zur geometrischen Analysis mit grosser Freude, in welcher der Herr Vf. den Anfängern auf dem von den griechischen Geometern uns vorgezeichneten trefflichen Wege, — der denn doch nun einmal der einzig richtige und wahre Weg bei dem geometrischen Unterrichte bleibt, —, eine sehr gute methodische Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben giebt. Alle pädagogischen Kunststücke, die man jetzt hin und wieder namentlich bei dem geometrischen Elementar-Unterrichte machen sieht, taugen, — insofern sie nicht bloss eine ganz oberflächliche geometrische Bildung bezwecken, die allerdings auch für manche Individuen ihren Nutzen haben kann, — nach unserer innigsten Ueberzeugung gar nichts, und man wird durch dieselben nie einen Knaben zum Geometer machen, ja sie werden auch nicht einmal zu irgend einem praktischen Beruf, der hauptsächlich in einer mathematischen Grundlage wurzelt, tüchtig

heran bilden. Nur wenn man bei dem geometrischen Unterrichte zur strengen Methode der Alten zurückkehrt, wobei sich jedoch, was schon öfter von uns bemerkt worden ist, immer noch ein gewisser Mittelweg inne halten lässt*), wird man wahrhaft glückliche Erfolge erreichen. Am allermeisten gilt dies aber von der Auflösung geometrischer Aufgaben, wo jede nicht nach der strengen Methode der Alten versuchte Auflösung zu blossem Herumtappen und Herumsuchen führt, ohne alle eigentliche Methode; und wird dann zufällig eine Auflösung gefunden, so ist dies meistens nur die Frucht eines glücklichen Zufalls, der für das geometrische Talent dessen, der diesen glücklichen Fund zufällig that, eigentlich gar nichts beweiset. Wir freuen uns daher nochmals sehr über das Erscheinen der vorliegenden Anleitung, die einem wahren Bedürfnisse abhilft, und heissen dieselbe im Interesse des wahrhaft Frucht tragenden geometrischen Elementarunterrichts herzlich willkommen. Mit dem vollsten Rechte hat der Herr Vf. sich ganz an die strenge Methode der Alten gehalten, und überall Analysis, Synthesis, Determination und Beweis von einander streng unterschieden, und darüber überall sehr fassliche Erläuterungen gegeben; sein Buch ist keineswegs ein gelehrtes, aber dagegen ein recht praktisches Buch zu nennen, was vorgerückteren Schülern und Lehrern, die in diesen Dingen noch zu lernen haben und lernen wollen, ein treffliches Hülfsmittel darbieten kann und wird, und die Anzahl der zur Erläuterung gebrauchten Beispiele, bei denen der Herr Verf. mit Recht weit weniger auf Neues als auf Zweckmässiges ausgegangen ist, ist für den Zweck, welchen der Herr Vf. zu erreichen beabsichtigte, gross genug. Schon ein blosser Blick in dieses Buch thut einem in der strengen Schule der Alten erzogenen Lehrer der Geometrie wahrhaft wohl, gegenüber dem meistens sehr seichten und nichts sagenden Geschwätz, was man jetzt namentlich in pädagogischen Zeitschriften häufig über den mathematischen Unterricht antrifft. Wir haben in diesem Buche in dem Herrn Vf. freudigst den „Würtemberger" erkannt: denn wer die Geschichte der Mathematik und des mathematischen Unterrichts kennt, weiss sehr wohl und erinnert sich mit dem wärmsten Danke, dass Würtemberg lange Zeit die eigentliche Pflanzstätte der strengen Geometrie in Deutschland war. Was er über Pfleiderer auf S. V. der Vorrede sagt, unterschreiben wir vollkommen; er hätte aber neben demselben auch noch viele andere seiner Landsleute mit eben demselben Rechte nennen können, und wir werden ihn nicht erst an Johann Friedrich und Wilhelm Pfaff, an Hauber (den Commentator des Euklides und Herausgeber archimedischer Schriften), an Schwab (den Herausgeber der Data des Euklides nach Robert Simson), an Camerer (den trefflichen Herausgeber der Schriften des Apollonius), an Bohnenberger (dessen Astronomie ein wahres Muster geometrischer Strenge im Geiste der Alten ist) und noch

---

*) M. s. z. B. im Literar. Ber. Nr. LIV. S. 751. die Anzeige von Schlömilch's ausgezeichneter Geometrie des Maasses, die, wenn auch nicht nach der Methode des Euklides, aber doch in demselben strengen Geiste, welcher hauptsächlich die Geometrie der Alten charakterisirt, abgefasst ist.

viele andere Würtemberger zu erinnern brauchen; ja auch der treffliche L'Huilier, der so vieles Ausgezeichnete auch auf dem Gebiete der reinen Geometrie geleistet hat, und sich lange bei Pfleiderer in Tübingen aufhielt (er sagt in der Vorrede zu seiner Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae. 1795. p. II.: „Amicus meus, Dn. Pfleiderer, Phys. et Math. Prof. in Universitate Tubingensi, refugium mihi secum obtulit: ubi studiis ad levandos doloris intentus, quae ad novam Dissertationis meae editionem, dudum necessariam visam, sparsim praeparaveram, in ordinem redegi, et cum amico communicavi, ipsiusque observationes consului; quo factum esse spero, ut, quod publico nunc offero, scriptum utile sit nec ejus attentione indignum") kann mit hierher gerechnet werden. Aber solche Namen kennen freilich unsere Pädagogen jetzt nicht mehr; wie könnte das aber auch anders sein, da sie den Euklides nicht mehr lesen, dessen eifriges Studium ihnen jedoch gewiss sehr anzurathen wäre!

Einzelnes aus dem Buche des Herrn Rector Nagel anzuführen, verbietet uns leider der Raum; um aber zu zeigen, wie sehr, bei aller praktischen Brauchbarkeit desselben, ohne allen gelehrten Flitterstaat, der hier sehr leicht anzubringen gewesen wäre, und leichten Verständlichkeit seines Inhalts, darin der Geist der Alten weht, können wir uns nicht versagen, zum Schluss in der Kürze noch seinen Inhalt anzugeben:

Erstes Buch. Ueber die Natur und über die Theile einer Aufgabe. Die Natur der Aufgabe. Von den Hauptbestandtheilen einer Aufgabe. Von der Aufgabe im engern Sinne. Von der Construction. Von dem Beweise. Von der Determination. — *Zweites Buch.* Ueber die geometrische Analysis. Wesen der geometrischen Analysis. Auflösung einiger geometrischen Aufgaben durch Anwendung der geometrischen Analysis. Der Zusammenhang der geometrischen Analysis mit der Construction und dem Beweise. — *Drittes Buch.* Die verschiedenen Hauptwege, um zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu gelangen. Allgemeine Bemerkungen über diese Wege. Die Auflösung der Aufgaben durch Analogie. Die Auflösung der Aufgaben durch Reduction. Die Auflösung der Aufgaben durch Lehrsätze. Die Auflösung der Aufgaben durch Data (möchte man doch die „Dedomena" oder „Data" des Euklides, dieses köstliche Ueberbleibsel aus dem griechischen Alterthume, wieder eifrigst studiren!). Die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter. — *Viertes Buch.* Lehre von den geometrischen Oertern. *Anhang.* Sammlung von Aufgaben.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatoria di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803—1813. Tomo nono 1811—1813. Vienna. 1849. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten her-

ausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 32. Theil. Neuer Folge 12r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1811 bis 1813. Wien. 1849. 4. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. LVIII. S. 790.).

Mit diesem Bande ist die höchst verdienstliche Herausgabe der Piazzi'schen Beobachtungen nun vollendet, wozu wir den Herren Herausgebern von Herzen Glück wünschen. Die eifrige Benutzung dieses ausgezeichneten und schwierigen Werkes wird der Astronomie gewiss noch weit mehr schöne Früchte tragen, als dies bereits geschehen ist, wie z. B. in der Abhandlung von C. A. F. Peters: Ueber die eigene Bewegung des Sirius, in der neuesten Nummer der astronomischen Nachrichten. (Nr. 745.)

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LVI. S. 773.)

Jahrgang 1850. Erste Abth. (März.). S. 233. Pohl: Auszug aus seiner Abhandlung „Ueber die Siedepunkte mehrerer alkoholhaltiger Flüssigkeiten und die darauf gegründeten Verfahren den Alkoholgehalt derselben zu chemisch-technischen Zwecken zu bestimmen". — Ausserdem befinden sich in diesem Hefte eine grössere Anzahl höchst interessanter Verhandlungen über eine Reise um die Erde, welche von der k. k. Marine unternommen werden soll, und die Betheiligung der k. k. Akademie der Wissenschaften bei dieser Reise. Der k. k. Viceadmiral v. Dahlrup hat diese Reise zur Uebung der Mannschaft der k. k. Marine und zur Förderung commercieller Zwecke bei dem k. k. Kriegsministerium beantragt, und der Antrag hat im Ministerrathe allen den Anklang gefunden, den er verdient. Die Reise soll mit einem k. k. Kriegsschiffe in das atlantische und das stille Meer unternommen werden, und das Schiff soll, statt vom stillen Meere auf dem Wege über das Cap Horn wieder zurückzukehren, seine Fahrt nach Westen fortsetzen und China, Siam, Singapure, Ceylon, Bombay, das Cap und die Westküste Afrikas berühren. Der Minister für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten, Herr v. Bruck, fordert die Akademie auf, diese Reise um die Erde zur Förderung ihrer Zwecke zu benutzen, und dass die Akademie diese Aufforderung eifrigst ergreifen würde, liess sich bei dem allgemein bekannten grossen Eifer und Erfolg, womit die k. k. Akademie sich der Förderung der Wissenschaften nach allen Richtungen hin widmet, nicht anders erwarten, und wird durch die in diesem Hefte mitgetheilten interessanten Verhandlungen, welche in der Akademie über diesen Gegenstand Statt gefunden haben, genugsam bestätigt.

Jahrgang 1850. Erste Abth. April. Mathematische und physikalische Abhandlungen, im eigentlichen Sinne, enthält dieses Heft zwar nicht; dagegen aber viele interessante Aufsätze aus anderen Gebieten der Naturwissenschaften, z. B. der Geologie

und Krystallographie. Wir erwähnen davon nur die folgenden: S. 369. v. Morlot: Ueber die Niveaus des älteren Diluviums und der Miocen-Formation. — S. 398. Wedl und Müller: Beiträge zur Anatomie des zweibuckligen Kameles (Camelus bactrianus). — S. 425. Boué: Ueber die Paläo-, Hydro- und Orographie der Erdoberfläche oder den wahrscheinlichen Platz des Wassers und des Landes, so wie über die wahrscheinliche Tiefe der Meere und die absolute Höhe der Länder und ihrer Gebirge während der verschiedenen geologischen Perioden.

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Mai.) S. 504. Anleitung zur Ausführung von Beobachtungen über die an eine jährliche Periode gebundenen Erscheinungen im Pflanzenreiche. Nach den Ideen von Quetelet, Spring, theilweise nach den Ansichten und Erfahrungen von Fritsch. (Diese ausführliche Abhandlung empfehlen wir allen denen, die sich mit solchen Beobachtungen wie die in Rede stehenden beschäftigen wollen.). — S. 542. In mehrfacher Beziehung interessant ist auch eine Abhandlung von Simony in diesem Hefte: Ueber die Seen des Salzkammergutes.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (Juni). S. 19. Wilhelm Wertheim: Hauptresultate seiner neuesten Untersuchungen über die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der flüssigen Körper. — S. 31. v. Ettingshausen: Zur Nachweisung der Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Betrifft eine neue Einkleidung des dritten Gauss'schen Beweises des bekannten algebraischen Hauptsatzes, den wir der Beachtung unserer Leser empfehlen. — S. 34. Derselbe: Beitrag zur Integration irrationaler Differential-Formeln. Betrifft eine der Berücksichtigung sehr werthe Vereinfachung der in den Lehrbüchern gewöhnlichen Behandlung der Integrale von der Form

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \partial x.$$

— S. 37. Kreil: Vortrag über das Inductions-Inclinatorium an der Prager Sternwarte und ein selbstregistrirendes Metallthermometer. — S 46. Pierre: Ueber eine Methode die Spannkraft der Dämpfe in der Luft direct zu messen. — S. 82. v. Ettingshausen: Bericht über Spitzer's Abhandlungen über die höheren Zahlengleichungen.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (Juli.) S. 119. A. v. Ettingshausen: Ueber einige Eigenschaften der Flächen, welche zur Construction der imaginären Wurzeln der Gleichungen dienen. — S. 150. Koller: Bericht über Böhm's Abhandlung: „Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotations-Elemente der Sonne. Wir führen die Hauptresultate dieser Abhandlung kurz an:

Neigung des Sonnenäquators gegen die Ekliptik . . . 6° 56′ 6

Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators 76° 46′ 9

Tropische Umdrehungszeit der Sonne . . . . . . 25,821 Tage.

Die von Lalande und Delambre gemachten Bestimmungen geben im Mittel respective:

7° 19′; 78° 50′; 25,021 Tage.

Kein einziger der beobachteten Sonnenflecken berechtigte zur Annahme einer eigenen Bewegung der Sonnenflecken. Ausserdem lieferten die Beobachtungen unzweifelhaft die Bestätigung:

a) dass die Sonnenflecken in beiden Hemisphären der Sonne gleich zahlreich erscheinen, und

b) dass sie in der Nähe des Sonnenäquators und in einer heliocentrischen Breite über 35° hinaus nur selten, dagegen in der zwischenliegenden Zone am häufigsten vorkommen. —

S. 154. Doppler: Einige Mittheilungen und Bemerkungen, seine Theorie des farbigen Lichts der Doppelsterne betreffend. Herr Doppler legt in dieser Abhandlung der k. k. Akademie die neueren von verschiedenen Physikern und Astronomen angestellten Forschungen vor, welche zur Bestätigung der Richtigkeit seiner Theorie gedient haben, und macht dabei hauptsächlich auf zwei Memoiren des Herrn Sestini, Astronomen am Collegio Romano zu Rom aufmerksam, welche folgende Titel haben:

1) Memoria sopra i colori delle stelle del catalogo di Baily, osservati dal P. Benedetto Sestini. Roma 1845.

2) Memoria seconda intorno di colori delle stelle del catalogo di Baily, osservati dal P. Benedetto Sestini. Roma. 1847.

Wir halten allerdings die Resultate, zu denen Herr Sestini durch seine Beobachtungen gelangt ist, für so bemerkenswerth, dass wir dieselben nach den von Herrn Doppler gemachten Anführungen unseren Lesern hier mittheilen wollen:

1. Die Farbe des Lichtes der Fixsterne, welche keine Doppel- oder mehrfache Sterne sind, ist ganz gegen die bisherige Meinung der Astronomen, die gemeinhin nur den letzteren farbiges Licht zuerkannten, nicht bei allen die weisse und eben so wenig die gelbe, sondern es finden sich unter diesen Sterne in gar nicht unbeträchtlicher Menge von oranger, rother, grüner, blauer und violetter Farbe mit allen möglichen Nuancirungen vor. Die Sterne von gelblichem Lichte mit theilweise schwacher farbiger Nuancirung machen beiläufig die Hälfte von allen aus; solche von weissem Lichte betragen ungefähr $1/5$ und jene von oranger Farbe etwas über $1/5$ — so also, dass für die übrigen Farben nur etwa ein schwaches $1/10$ von allen übrig bleibt.

2. Ganz gegen alles Vermuthen finden sich ferner diese farbigen Sterne durchaus nicht über das ganze sichtbare Himmelsgewölbe gleichförmig und noch viel weniger bezüglich der einzelnen Farben in gleichem Verhältnisse vertheilt vor, sondern es

hat in dieser Beziehung ein auffallender höchst beachtenswerther Unterschied statt. Eine genaue von Herrn **Sestini** selber angestellte Vergleichung zeigt nämlich:

a) dass die weissen Sterne am häufigsten in der nördlichen Himmelshälfte und zwar beiläufig zwischen 60 — 90° nördlicher Breite sich vorfinden, die südlichen Gegenden dagegen daran sehr arm sind;

b) dass die bei weitem meisten Sterne mit farbigem Lichte innerhalb einer Zone liegen, welche beiläufig von 30° nördlicher bis zu 30° südlicher Breite reicht.

Hier muss berichtigend hinzugefügt werden, dass man sich durch eine Einsicht in den beigefügten Catalog leicht davon überzeugt, dass dieser Gürtel nichts weniger als mit dem Himmels-Aequator parallel läuft.

c) dass ferner auf der nördlichen Hälfte dieser Zone verhältnissmässig die meisten blauen und violetten, in der südlichen hingegen die meisten orangen und rothen Sterne sich vorfinden.

d) dass es weiter von allen Partien des gestirnten Himmels keine gibt, an welcher im Vergleiche zu den daselbst befindlichen anderen Sternen so viele blaue und violette Sterne vorkommen, als jene, wo sich das Sternbild des Herkules befindet. Nun aber ist es bekannt, dass nach **Herschels** und **Argelanders** Untersuchungen unser Planetensystem mit der Sonne als seinem Centralkörper aus der südlichen gegen die nördliche Hemisphäre und zwar ungefähr in der Richtung vom Flusse Eridanus gegen das Sternbild des Herkules hin sich bewegt; es erscheint demnach nur als eine nothwendige Consequenz meiner*) aufgestellten Theorie, dass die südliche Himmelshälfte verhältnissmässig mehr orange und rothe, die nördliche dagegen mehr blaue und violette Sterne zählen müsse, so wie insbesondere in der Gegend wo sich beiläufig Herkules befindet, von allen die meisten blauen und violetten vorkommen müssen. Aus gleichem Grunde muss auch die südliche Himmelshälfte bedeutend ärmer an Sternen geringerer Grösse sich zeigen als die nördliche. Ich habe in meinen früheren Abhandlungen des letzteren Umstandes ausdrücklich, des vorhergehenden wenigstens andeutungsweise erwähnt, und die Beobachtung hat meine, wie es mir schon damals schien, gegründete Vermuthung nicht zu Schanden werden lassen.

3. Das farbige Licht der einfachen oder der als solche geltenden Fixsterne ist gleich jenem der Doppel- und mehrfachen Sterne höchst wahrscheinlich einer Aenderung unterworfen, die jedoch von viel längerer Dauer ist als jene bei den meisten Doppelsternen. Für diese Ansicht sprechen, wenn auch nur wenige, doch gut constatirte Beobachtungen.

---

*) (d. h. Herrn Doppler's)

Nebst der bereits bekannten auffallenden Farbveränderung des Sirius führt Herr Sestini neuerlichst noch den Stern *b* in den Zwillingen an, welcher Stern im Almagest als roth bezeichnet wird, während ihn doch heut zu Tage Jedermann zu den entschieden weissen rechnet.

4. Endlich hat Herr Sestini durch seine Beobachtungen verbunden mit einer sorgfältigen Vergleichung früherer darauf be, züglichen Angaben, die Anzahl der bereits bekannten an Farbe veränderlichen Doppelsterne noch um mehrere vermehrt, wie diess aus seinem Memoire von 1845, pag. 11., und aus jenem von 1847, pag. 10. zu ersehen ist.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XVI. IIme Partie. 1849. Tome XVII. Ire Partie. 1850. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LI. S. 714.).

Tome XVI. IIme Partie. 1849. p. 17. Des proportions du corps humain; par M. A. Quetelet. Troisième article (Voir le deuxième article. T. XV. IIme Partie. p. 16.). Proportions de l'homme d'après les artistes italiens de la renaissance. — p. 28. Sur l'electricité et sur les anomalies que cet élément météorologique a présentées dans ces derniers temps, par M. A. Quetelet — p. 30. Troisième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine; par M. J. Plateau. — p. 39. Note sur la polarisation des électrodes du voltamètre; par M. P. Loyet. — p. 251. Méthode particulière pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne, à l'aide des observations astronomiques; par M. le capitaine Liagre. — p. 254. Quatrième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine; par J. Plateau. — p. 282. Sur l'électricité de l'air pendant les neuf premiers mois de l'année 1849; par M. Quetelet. — p. 343. Notice sur une projection géographique nouvelle; par M. M. Donny. — p. 345. Mémoire sur les points brillants des courbes et des surfaces; par M. De Boer. — p. 347. Notice sur la décomposition electro-chimique par des voltamètres différents; par M. Maas. — p. 391. Notice sur une projection géographique nouvelle, par MM. F. C. L. Donny et F. M. L. Donny (S. vorber.). — p. 413. Sur la décomposition électro-chimique par des voltamètres différents; par M. Maas (S. vorher); — p. 545. Mémoire sur la théorie des résidus quadratiques par M. Schaar. Rapport de M. Timmer-

mans. — p. 546. Sur un phénomène météorologique; par M. Edm. de Selys-Longchamps. —

Tome XVII. Ire Partie. 1850. p. 3. Sur l'électricité atmosphérique; par M. A. Quetelet. — p. 13. Sur le nain Jean Hannema, dit l'amiral Tromp; par M. A Quetelet. — p. 134. Sur les points focaux de l'ellipse; par M. le capitaine Liagre. In diesem Aufsatze discutirt der Herr Vf. den folgenden von ihm aufgestellten Satz:

„Il existe sur le grand axe de l'ellipse un nombre infini de points, situés deux à deux à égale distance du centre, et tels, que les rayons vecteurs menés de chaque couple à un même point de la courbe, sont liés entre eux par une relation indépendante de la position de ce point.“

„Les abscisses de ces points focaux sont de la forme $\pm\sqrt{\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n-2}}}$, le nombre n pouvant recevoir toutes les valeurs entières et positives, depuis zéro jusqu'a l'infini“ wo unter a und b die beiden Halbaxen der Ellipse verstanden werden. Es scheint dieser Gegenstand nicht uninteressant zu sein, und wohl eine noch weitere Untersuchung zu verdienen als die von dem geehrten Herrn Verf. hier mitgetheilte im Ganzen nur kurze Betrachtung giebt. — p. 216. Note sur les tremblements de terre, ressentis en 1849, par M. Alexis Perrey. p. 225. Supplément aux notes sur les tremblements de terre ressentis en 1847 et 1848. — p. 328. Sur les variations de pression atmosphérique et de température, à la fin de janvier et au commencement de février 1850. Lettre de M. A. Perrey. — p. 344. Sur un nain belge. Note communquée par M. Quetelet. — Notice sur une formule pour calculer l'élasticité de la vapeur d'eau, par M. Henri Bruckner, d'Aix-la Chapelle. Die auf diese Weise überschriebene Abhandlung enthält aber auch noch verschiedene arithmetische Bemerkungen über die Verwandlung der Wurzeln in Kettenbrüche, die Logarithmen und die Reihen. Wenn man

$$A=\frac{ma^{m-1}}{b},$$

$$B=\frac{2a}{m-1},$$

$$C=\frac{3m(m-1)a^{m-1}}{(m+1)b}=\frac{3A(m-1)}{m+1},$$

$$D=\frac{(m+1)2a}{(m-1)(2m-1)}=\frac{B(m+1)}{2m-1},$$

$$E=\frac{5m(m-1)(2m-1)a^{m-1}}{(m+1)(2m+1)b}=\frac{5C(2m-1)}{3(2m+1)},$$

$$F = \frac{(m+1)(2m+1)2a}{(m-1)(2m-1)(3m-1)} = \frac{D(2m+1)}{3m-1},$$

$$G = \frac{7m(m-1)(2m-1)(3m-1)a^{m-1}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)b} = \frac{7E(3m-1)}{5(3m+1)},$$

u. s. w.

setzt, so ist nach dem Herrn Verf.:

$$(a^m + b)^{\frac{1}{m}} = a + \frac{1}{A + \frac{1}{B + \frac{1}{C + \frac{1}{D + \text{etc.}}}}}$$

p. 424. Sur les variations annuelles du magnétisme terrestre à Bruxelles; par M. Quetelet. — p. 425. Sur les télégraphes électriques; par M. Quetelet. —

Ausserdem enthalten diese beiden Bände noch viele andere interessante Mittheilungen, namentlich meteorologischen Inhalts.

Subscriptions-Anzeige.

Bei A. C. Kronberger, Buchhändler in Prag, und J. F. Gress, Buchhändler in Wien, wird auf folgendes Werk Subscription angenommen:

Tafel siebenstelliger Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede Secunde des Quadranten. Herausgegeben von Jakob Phil. Kulik, ordentlichem Professor der höhern Mathematik zu Prag. Erste auf dem Continente von Europa veranstaltete Ausgabe.

Welchem Mathematiker ist es unbekannt, wie lästig, zeitraubend und ungenau die Interpolationen werden, wenn mittelst der gewöhnlichen Tafeln, welche nach Minuten fortlaufen, die einem gegebenen Winkel zugehörige trigonometrische Function, oder umgekehrt, zu dieser der correspondirende Winkel, oder endlich, wenn beim Uebergange von einer trigonometrischen Function zur andern, diese mit der erforderlichen Schärfe bestimmt werden soll. Ein anderer Nachtheil der gewöhnlichen Tafeln ist noch, dass

die natürlichen Logarithmen der Functionen, welche aus dem log. $\cos x$ hergeleitet werden, sich mittelst derselben auf keine befriedigende Weise berechnen lassen. Allen diesen Unzukömmlichkeiten wird aber durch dieses Werk, welches sowohl für jede Secunde des Quadranten die Logarithmen der Sinus und Tangenten, als auch in den ersten 18 Graden die Cosinus in mehr als 7 Decimalstellen liefert, abgeholfen.

Bedingungen der Herausgabe.

Dieses aus 96 Druckbogen bestehende Werk erscheint nur, wenn sich eine rege Theilnahme unter den deutschen Mathematikern dafür ausspricht. Das Ganze wird aus 6 Lieferungen bestehen, und der Ladenpreis jeder einzelnen Lieferung bei den jetzigen hohen Preisen des Papieres, Satzes und Druckes nur auf 1 Thaler gestellt werden; hiedurch erhält der Abnehmer das Werk um 6 Thaler in die Hände, während die *Shortrede*'schen Tafeln in Edinburg hier über 30 Thaler kosten, und dabei mit so kleinen Typen gedruckt sind, dass sie unausbleiblich auch die besten Augen zu Grunde richten müssen.

Sobald der erforderliche Aufwand zur Herausgabe des Werkes durch Subscription gedeckt sein wird, nimmt der Druck seinen Anfang, und wird ohne Unterbrechung durch 2 Jahre fortgesetzt und beendigt. Für durchaus reinen correcten Druck mit neuen Lettern auf gutem festen Papier wird gesorgt. Beim Erscheinen der ersten Lieferung wird auch die letzte berechnet, und es werden ausser den bestellten Exemplaren nur so viele abgezogen, als zur Deckung der allenfalls sich ergebenden Defecte erfordert werden. Jede Buchhandlung Deutschlands nimmt Subscription an. Die Namen der p. t. Herren Subscribenten, welche dieselben deutlich geschrieben mittheilen wollen, werden dem Werke vorgedruckt.

Nachschrift des Herausgebers.

Ich mache auf diese Tafeln alle Mathematiker aufmerksam, und die grosse Wichtigkeit einer durch die einzelnen Secunden des Quadranten fortschreitenden Tafel leuchtet wohl von selbst ein, da das Interpoliren doch immer eine sehr lästige Arbeit ist und die Rechnungen erschwert. Ich wünsche daher sehr, dass dieses Unternehmen des geehrten, durch andere ähnliche Unternehmungen schon hinreichend bekannten Herrn Vfs., recht rege Theilnahme unter den Mathematikern finden möge. G.

LXIII.

Literarischer Bericht.

Geodäsie.

Cours de Topographie et de Géodésie fait à l'école d'application du corps d'état major. Par J. F. Salneuve, Chef d'escadron d'état major. Seconde édition. Paris. 1850. 3 Thlr. 10 Sgr. 8.

Sind wir auch nicht gerade der Meinung, dass dieses Werk besondere Vorzüge vor unsern bekannten deutschen Werken derselben Gattung hat, so glauben wir doch die Leser des Archivs auf dasselbe aufmerksam machen zu müssen, weil es in Frankreich sehr beliebt zu sein scheint, und allerdings eine ziemlich vollständige Darstellung der niedern und höhern Geodäsie liefert. Ausserdem findet man in demselben auch manche in Deutschland noch unbekannte Instrumente beschrieben, z. B. einige Distanzmesser, die wohl einige Beachtung verdienen dürften, und grösstentheils von einem geschickten höhern piemontesischen Offizier, Herrn Porro, angegeben worden sind, von dem der Herr Vf. in der Vorrede sagt: „qui, à une profonde instruction, joint une sagacité merveilleuse dans l'application des principes d'optique, qu'il possède si bien. On lira surtout avec intérêt, je pense, la description de sa lunette anallatique, de sa longue-vue cornet, et, surtout, de l'appareil propre à mesurer les bases" über welchen letzteren eine Commission der Akademie der Wissenschaften in Paris, bestehend aus den Herren Binet, Faye und Largeteau, einen sehr günstigen Bericht erstattet hat. Der Inhalt der einzelnen Kapitel dieses allerdings in mancher Beziehung zu empfehlenden Buchs im Allgemeinen ist folgender.

Livre I. und *Livre* II. Diese zwei ersten Bücher enthalten eine ziemlich vollständige Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie, selbst auch den Binomischen Lehrsatz, und hätten ganz wegbleiben sollen. — *Livre* III. Topographie. Chap. I. Notions générales. Chap. II. Canevas topographique. Chap. III. Différens modes de lever. Instruments propres à mesurer les angles. Chap. IV. Instruments employés à la mesure des distances. Chap. V. Levées au goniomètre et à la chaine. Chap. VI. Levées à la Chaine, alignements, transversales. Chap. VII. Instruments à réflexion. Chap. VIII. En-

semble des opérations d'une levée relatives à la planimétrie, en combinant tous les procédés décrits isolément. Chap. IX. Nivellement. Chap. X. Nivellement topographique et figuré du terrain. Chap. XI. Du dessin des cartes topographiques. Chap. XII. Levées militaires. Chap. XIII. Plans cotés. Chap. XIV. Copie et réduction des cartes et plans. Chap. XV. Compas de proportion. Chap. XVI. Emploi de la boussole et de l'éclimètre à la perspective. — *Livre* IV. Optique. Dieses Buch enthält eine für den Zweck des Werks sehr vollständige Abhandlung über Optik, worin sich manches Bemerkenswerthe findet, z. B. die lunette anallatique de M. Porro. — *Livre* V. Géodésie. Chap. I. Ensemble des opérations géodésiques. Chap. II. Mesures des bases (p. 350. Appareil nouveau pour mesurer les bases géodésiques par M. Porro. Chap. III. Mesures des angles et description des instruments qui y sont consacrés. Chap. IV. Calculs relatifs à la résolution des triangles. Chap. V. Calculs des coordonnées des points. Chap. VI. Notions de Géométrie analytique, indispensables à l'intelligence des formules de latitude. (Hätte auch wegbleiben können.) Chap. VII. Expression analytique de quelques lignes remarquables du sphéroide terrestre. Chap. VIII. Formules de latitude, longitude et azimut. Chap. IX. Nivellement géodésique et barométrique. Chap. X. Projections. — *Livre* VI. Observations et calculs astronomiques. Chap. I. Notions préliminaires. Chap. II. Précession, nutation, aberration, parallaxe, réfraction. Chap. III. Marche d'une pendule, latitude et longitude d'un point; azimut d'un coté. — *Suite de tableaux* 1°. a l'inscription des angles observés et des éléments de réduction, ainsi qu'aux différents calculs géodésiques; 2° aux calculs astronomiques.

Astronomie.

Schumachers Tod.

Es ist dem Herzen des Herausgebers des Archivs Bedürfniss, seinen Lesern das Hinscheiden eines Mannes anzuzeigen, welchem er, so lange er das Glück hatte, mit ihm in wissenschaftlichem Verkehr zu stehen, die höchste Achtung gezollt hat, eine Achtung, die nie durch etwas getrübt worden ist, und auch über das Grab hinüber dauern wird, so lange das Herz des Herausgebers des Archivs noch schlagen wird. *Heinrich Christian Schumacher* ist nicht mehr! Seine Verdienste um die Wissenschaft zu würdigen, kann hier nicht der Ort sein. Sie sind der Welt bekannt. Aber eine kurze Skizze seiner äusseren Lebensumstände wird und muss bei so hohem Verdienst den Lesern des Archivs lehrreich und interessant sein. Ich stehe daher nicht an, einen solchen kurzen Abriss dieses thätigen und erfolgreichen Lebens aus der neuesten Nummer von Jahn's Unterhaltungen für Dilettanten und Freunde der Astronomie, Geographie

und **Meteorologie**. 1851. Nr. 11., die mir vorliegt, zu entnehmen, deren historische Richtigkeit keinen Zweifel lässt, da sie von einem Manne, Herrn Doctor Petersen in Altona, herrührt, der dem Dahingeschiedenen sehr nahe stand. Herr Doctor Jahn hat übrigens schon in Nr. 3. 4. 5. 1851. seiner genannten Zeitschrift eine ausführlichere Darstellung von Schumachers Leben geliefert, die zugleich auch die wissenschaftlichen Verdienste des Verstorbenen genauer in's Auge fasst, und auf die ich daher in dieser Beziehung die Leser verweise.

G.

Heinrich Christian Schumacher*)

ist in dem Flecken Bramstedt in Holstein den 3. Septbr. 1780 geboren. Sein Vater, der königl. dänische Conferenzrath Andreas Schumacher, dessen Voraltern im 16. Jahrhundert aus Westphalen nach Dänemark gekommen waren, und von welchen der berühmte Griffenfeldt abstammte, war in jüngern Jahren bei der dänischen Gesandtschaft in St. Petersburg angestellt, erhielt später eine Anstellung unter König Christian VII. in Kopenhagen, wurde hierauf Kirchspielvogt in Bramstedt, wo H. C. Schumacher geboren wurde, und zuletzt Amtmann in Segeberg, wo ihm ein zweiter Sohn, Andreas Anton Friedrich Schumacher im Jahre 1782 geboren ward. Er starb hier, den 2. Januar 1790, innigst betrauert wegen seines vortrefflichen Charakters und seines seltenen Verstandes, von Allen, die ihn kannten. Die Mutter unseres Schumachers war Sophie Hedwig geb. Weddy, verwittwete Hofräthin Büsching, Schwägerin des berühmten Geographen Büsching. Sie starb am 30. October 1822 in Altona, wo auf dem Kirchhofe zum heiligen Geist jetzt der Sohn neben ihr in Frieden ruht.

H. C. Schumacher und sein Bruder, die einzigen Kinder dieser Ehe, wurden, so lange der Vater lebte, unter seiner Leitung von einem Hauslehrer unterrichtet. Da aber die schwächliche Gesundheit des Vaters diesen nicht hoffen liess, seine hoffnungsvollen Söhne erwachsen zu sehen, so empfahl er sie der Huld des damaligen Kronprinzen, spätern Königs Friedrich VI., der ihn liebte und schätzte, hoffend, sie würden einst dem Vaterlande Ehre machen. Wie beide diese Hoffnung erfüllt haben, ist hinlänglich bekannt, auch blieb der gütige Monarch ihnen stets nicht nur Beschützer, sondern auch Freund.

Als der Vater starb, war der nachherige Pastor in Preetz, Dörfer, rühmlichst bekannt durch seine Topographie von Schleswig und Holstein, der Lehrer der beiden Söhne, mit welchen bald darauf die Mutter nach Altona zog. Hier besuchten Beide das Gymnasium und genossen zugleich Dörfer's Unterricht, der inzwischen Prediger bei der heil. Geist-Kirche geworden war, und dessen Andenken ihnen stets in dankbarer Erinnerung blieb.

---

*) Von Herrn Dr. Petersen in Altona an uns mit der Bitte um Aufnahme eingesendet. Diesem geehrten Herrn dafür ergebenst dankend, bemerken wir, dass wir aus diesen sehr schätzbaren Mittheilungen, um Wiederholungen zu vermeiden, nur das weggelassen haben, was bereits S. 17 ff. vorkommt. Die Red. (der astronom. Unterhaltungen.)

Schon als Knabe zeigte Schumacher eine besondere Vorliebe für Mathematik; er verfertigte sich hölzerne Uhren und Instrumente, mit denen er Beobachtungen anstellte. Da er als Knabe schwächlich war und der Arzt es für höchst nöthig hielt, dass er einige Zeit seinen Schulfleiss einstelle und die Landluft geniesse, so brachte seine Mutter ihn nach einem ihr befreundeten Prediger auf dem Lande, wo er sehr gern war. Nachdem er hier einige Wochen froh verlebt hatte, erhielt er die Nachricht von seiner Mutter, dass sie das so sehr gewünschte Buch, Wolf's Mathematik, für ihn gekauft habe, und nun liess er ihr keine Ruhe mehr, bis sie ihm erlaubte, zurück zu seinen Studien zu kehren. Durch Hilfe dieses Buches brachte er es nun bald sehr weit in der Mathematik, so wie er überhaupt seinen grossen Reichthum an Kenntnissen, auch namentlich sowohl in den alten, als in vielen der neuern Sprachen, seinem angestrengten Fleisse und dem Selbststudium verdankte.

Er studirte in Kiel und Göttingen Jurisprudenz, beschäftigte sich aber nebenher fleissig mit Mathematik. Von der Universität brachte er die musterhaftesten Zeugnisse der Professoren mit, die seinen Fleiss, seine Kenntnisse und seinen reinen Lebenswandel rühmlichst hervorhoben. Im Jahr 1806 promovirte er in Göttingen zum Doctor der Rechte. Hierauf verlebte er einige Jahre in Liefland als Hauslehrer. Von dort zurückgekehrt, hatte er das Glück dem Curator der Universität in Kiel, Grafen v. Reventlow, bekannt zu werden, durch dessen Einfluss es ihm möglich wurde, sich nun ganz der Mathematik und Astronomie zu widmen, und einige Jahre bei dem berühmten Gauss in Göttingen zuzubringen, der bald in ihm den Geistesverwandten erkannte, und ihm Freund ward, welches Bündniss nur der Tod für diese Welt löste.

Im Jahre 1810 oder 1811 wurde er zum ausserordentlichen Professor der Astronomie in Kopenhagen ernannt, als noch der Conferenzrath Bugge daselbst Director der Sternwarte war, folgte aber 1812 mit Erlaubniss seines Königs und unter der Bedingung, nach dem etwaigen Ableben Bugge's nach Kopenhagen zurück zu kehren, einem sehr vortheilhaften Rufe als Director der Mannheimer Sternwarte, wozu ihn sowohl der Wunsch, allein einer Sternwarte vorzustehen, bestimmte, als auch der Rath eines hochgestellten Beschützers und Freundes, mit dem er bis zu dessen Tode stets in freundschaftlichem Briefwechsel stand.

So trat er im Herbste 1813 die Stelle als Director der Sternwarte in Mannheim an, verheirathete sich aber vorher mit seiner jetzt um ihn trauernden Wittwe, Christine Magdalene geb. v. Schoon, mit welcher er in einer höchst glücklichen Ehe lebte und mit 7 Kindern, 4 Söhnen und 3 Töchtern, gesegnet wurde, von welchen ihm der jüngste und älteste Sohn bereits in die Ewigkeit vorangegangen waren. Schon 1½ Jahr hierauf starb Bugge, und nachdem er im Februar 1815 in Wien bei dem Könige von Dänemark, der damals des Congresses wegen sich dort aufhielt (Schumacher traf dort auch seinen geliebten Bruder, der Adjutant des Königs war), gewesen, um ihm wegen seiner zukünftigen Stellung in Kopenhagen einen Vortrag zu machen, trat er seine Stelle

als ordentlicher Prof. der Astronomie und Director der Sternwarte dort an. Er hielt seine Vorlesungen in lateinischer Sprache.

Er war mit allen bedeutenden Gelehrten befreundet und mit den meisten auch persönlich bekannt, welche Bekanntschaften er theils zu Hause bei sich, theils auf seinen wissenschaftlichen Reisen gemacht hatte; so z. B. auf der Reise nach Frankreich und England im Jahre 1819. Fernere Reisen unternahm er 1826 nach München, 1834 nach Berlin, um Bessel und Encke zu besuchen..... Ausserdem machte er jährlich eine Reise nach Kopenhagen und, so lange Olbers lebte, auch nach Bremen. Unter seiner Anleitung haben sich für die Astronomie und Mathematik ganz gebildet: die Herrn Gunlaa, Lehrer auf Island, Nissen, Deichgraf in Tondern, Hofrath Hansen, Director der Sternwarte in Gotha, Hofrath Claussen, Observator der Sternwarte in Dorpat, Dr. Peters, Prof. der Astronomie in Königsberg und Dr. Petersen seit 1827 sein Gehilfe bei der Sternwarte in Altona. Ausserdem haben sich kürzere Zeit in Altona aufgehalten, um sich unter seiner Aufsicht im Beobachten zu üben, die Herren Professoren und jetzt Directoren von Sternwarten: Olufsen in Kopenhagen, Selander in Stockholm, Svanberg in Upsala, v. Fuss in Wilna, Agaardh in Lund, Dr. Gould zu Cambridge in Nordamerika, und in den letzten Jahren sein Sohn Richard Schumacher, Dr. Olde, A. Sonntag und A. Quirling.

Welche Fähigkeiten er hierdurch der Astronomie zugeführt hat, ist zu bekannt, als dass es hier näher aus einander gesetzt zu werden brauchte; eben so was er selbst für seine Wissenschaft gethan. . . . . Andere bedeutende Arbeiten, welche noch nicht oder nicht vollständig publicirt sind, jetzt aber hoffentlich bald der Oeffentlichkeit werden übergeben werden, sind: Die Arbeiten an der dänischen Gradmessung, die Bestimmung der Länge des einfachen Pendels durch Beobachtungen auf Güldenstein 1829 und 1830, seine Gewichtsbestimmungen, die von ihm veranstalteten Chronometer-Reisen zwischen Altona und Lübeck. Ausserdem liegen viele Reihen von astronomischen Beobachtungen von ihm vor.

So hoch er als Gelehrter stand, so hoch stand er auch als Mensch. Er war der liebenswürdigste und nachsichtsvollste Gatte und Vater. In Gesellschaften war er stets heiter und munter, und wo er nur Jemandem helfen konnte, scheute er keine Mühe und selbst kein Opfer von seiner Seite, vorzüglich, wenn er sich davon Erfolg für den, dem er helfen wollte, versprach. Er konnte mit der grössten Geduld und ohne Miene des Missmuths dabei zu zeigen, selbst wenn er mit Arbeiten überhäuft war, die unbedeutendsten und langweiligsten Erörterungen anhören, und fand immer nachher Zeit, das Versäumte nachzuholen. Er wurde von Allen, die ihn näher kannten, verehrt und geliebt, und sein Andenken wird ihnen stets unvergesslich bleiben.

Ueber die näheren Umstände seines Todes giebt uns die mit einem schwarzen Rande umgebene Nr. 744. der astronomischen Nachrichten die folgende Nachricht:

Am 28sten December 1850, Vormittags 11½ Uhr, entschlief sanft und ruhig, unter den Erscheinungen einer Lungenlähmung,

Heinrich Christian Schumacher, in seinem am 3ten Septbr. angefangenen 71sten Lebensjahre. Schon ein halbes Jahr vor seinem Ende glaubte er eine merkliche Abnahme seiner Kräfte zu verspüren, und wiederholt sagte er seinen Tod mit dem Ausgange des Jahres voraus. Leberbeschwerden bildeten die objectiven Manifestationen seiner kranken Gefühle. Sie waren ohne Zweifel, nach der Ansicht seines vieljährigen befreundeten Arztes, Folgen seines Stubenlebens, aber auch nicht ausser Beziehung zu den Zeitverhältnissen. In den letzten Tagen des Novembers nahmen sie einen acuten Verlauf, konnten dieses Mal nicht, wie es in den letzten Jahren glücklicher Weise mehrfach der Fall gewesen war, durch einen, leider zu kurzen und unvollständigen Podagraanfall hinlänglich abgeleitet werden, und führten nach vielen Schmerzen und Beschwerden, welche der Leidende mit unübertroffener Geduld und Fassung ruhig und gelassen ertrug, den traurigen Ausgang herbei.

Er wurde während seiner schweren Krankheit mit der seltensten Liebe und Sorgfalt von seiner nun trauernden Frau und ältesten Tochter, Sophie, gepflegt. Sein Geist blieb bis zum letzten Augenblicke rege und ungeschwächt, und noch am Abende vor seinem Sterbetage, da ich wie gewöhnlich ihm die Zeitung vorlas, machte er durch Zeichen bemerkbar, welche Artikel ihn vorzüglich ansprachen, denn leider wurde ihm, während der letzten Hälfte seines Schmerzenslagers, das Sprechen sehr schwer, und machte jede directe Unterhaltung mit ihm unmöglich.

Es wäre eine Vermessenheit, wollte ich hier auch nur ein Wort über seine grossen Verdienste um die Wissenschaften hinzufügen; sein Verlust ist unersetzlich, diese Nachrichten sind sprechende Thaten.

Altona 1851. Januar 5.

A. C. Petersen.

Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung von Dr. A. Sawitsch, Professor der Astronomie an der kaiserlichen Universität zu St. Petersburg. Aus dem Russischen übersetzt von Dr. W. C. Götze. Mit mehreren im Originalwerke nicht vorhandenen vom Herrn Verfasser nachgelieferten Zusätzen und Erweiterungen. Zweiter Band. Hamburg. 1851. 8.

Wir freuen uns sehr, schon jetzt den zweiten Band dieses vortrefflichen Werkes, dessen ersten Band wir in Nr. LIX. S. 800. angezeigt haben, den Lesern des Archivs wiederholt zur sorgfältigsten Beachtung dringend empfehlen zu können. Was wir über den ersten Band gesagt haben, gilt auch ganz von dem vorliegenden zweiten Bande, und Herr Professor Sawitsch hat sich durch die Herausgabe des nun in seiner Vollendung vorliegenden Werkes jedenfalls ein grosses Verdienst erworben, da uns kein anderes Werk bekannt ist, in welchem die neuesten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden so vollständig und deutlich entwickelt wären wie in dem vorliegenden, innerhalb des Kreises nämlich, den sich das Werk selbst gezogen hat, indem es hauptsächlich

die geographische Ortsbestimmung zum Zweck hat, so dass es also z. B. über die Berechnung der Planeten- und Cometenbahnen nichts enthält, was auch jedenfalls seinen Umfang zu sehr vergrössert haben würde. Eben so freudig wie das Verdienst des Herrn Verfassers erkennen wir aber auch wiederholt das Verdienst des Herrn Uebersetzers an, was sich derselbe nicht nur durch die sehr gute Uebertragung dieses Werks aus dem Russischen in's Deutsche um unsere vaterländische Literatur insbesondere, sondern auch in allgemein wissenschaftlicher Beziehung durch manche eigene Zusätze zu diesem in so vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke erworben hat. Wir können nicht umhin, dem Herrn Verfasser und dem Herrn Uebersetzer aufrichtigst zu der nunmehrigen Vollendung dieses Werkes Glück zu wünschen, und wollen nun noch den Inhalt des zweiten Theils im Allgemeinen angeben, so weit es hier der Raum gestattet.

S 1. *Fünfter Abschnitt.* Von den verschiedenen Methoden der Längenbestimmung. Dieser Abschnitt gehört natürlich zu den wichtigsten des ganzen Werks, und ist auch auf eine dieser grossen Wichtigkeit ganz entsprechende Weise behandelt worden. I. Längenbestimmung durch Chronometerübertragungen (Hier auch z. B. von S. 13. — S. 16. „Ueber eine bequeme Methode zur Bestimmung der sogenannten persönlichen Gleichung, welche zwischen verschiedenen Beobachtern stattfinden kann"). — II. Bestimmung des Längenunterschiedes durch besondere momentane Signale, und zwar entweder durch Pulversignale, oder mittelst electromagnetischer Telegraphen. — III. Allgemeine astronomische Methode zur Längenbestimmung. 1stens Berechnung der Länge aus Mondfinsternissen und aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. 2tens. Berechnung der Länge aus den Sonnenfinsternissen und aus den Bedeckungen der Sterne und Planeten durch den Mond. Man wird hier Alles finden, was über diesen wichtigen Gegenstand bis jetzt bekannt und wirklich praktisch anwendbar ist. Insbesondere machen wir auch auf die von S. 133. angegebene Darstellung der „Gaussischen Methode, den Verlauf einer Sonnenfinsterniss auf der Erde überhaupt zu berechnen" aufmerksam, welcher der Herr Uebersetzer zugleich einige eigne werthvolle Zusätze (Methode des Uebersetzers zur Berechnung des Anfangs und des Endes der Finsterniss, so wie der grössten Phase, mit Hülfe der Gaussischen Methode. Beispiel dazu) beigegeben hat. Ausserdem hat derselbe nach dieser Methode die totale Sonnenfinsterniss am 28sten Juli 1851. auf S. 189. ff. berechnet, und dadurch die praktische Anwendbarkeit derselben in ein sehr helles Licht gesetzt. Auf S. 133. wird gesagt, dass diese Gaussische Methode zuerst in der Dissertation des Herrn G. F. Ursin: De eclipsi solari die 7. Septembris 1820. apparitura. Hafniae 1820. näher erläutert worden sei. Die Methode kann mit dem Namen einer Projectionsmethode belegt werden, und als Projectionsebene wird (S. 133.) die Ebene angenommen, welche senkrecht auf der Linie zwischen dem Mittelpunkte der Sonne und der Erde steht und in der Nähe der Conjunction des Mondes mit der Sonne durch den Mittelpunkt des Mondes geht. Vielleicht dürfte es angemessen sein, bei dieser Gelegenheit an eine schon

im Jahre 1812. erschienene Dissertation des Herrn Professors **Gerling** in Marburg zu erinnern, welche den Titel hat: **Methodi projectionis orthographicae usum ad calculos parallacticos facilitandos explicavit simulque eclipsin solarem die VII. Septbr. 1820. apparituram hoc modo tractatam mappaque geographica illustratam tanquam exemplum exposuit Christianus Ludovicus Gerling. Gottingae. 1812. 4.** In dieser Dissertation sagt der Herr Vf. über die angenommene Projectionsebene auf p. 2.: „Quanquam vero ipsa haec projectionis methodus ab aliis aliter tractetur, ut postea videbimus, tamen inter omnes convenit unum idemque planum eligere, ad quod omnia puncta in hac quaestione obvia perpendiculis demissis referantur, planum puta, in lineam rectam fixae occultae vel solis eclipsin aut transitum patientis centrum cum terrae centro jungentem, perpendiculare. In sequentibus vero patebit, ex innumeris iis planis, quae huic conditioni satisfaciunt, optime id eligi, quod ipsum lunae vel planetae solis discum transmigrantis centrum transiens, corporum horum orbitas curvilineas ita sequatur, ut semper sibi ipsi parallelum moveatur“ —

Die Methode der Längenbestimmung durch Mondsculminationen hat in dieser Nr. III des fünften Abschnitts auch eine Stelle gefunden, und man findet hier eine sehr deutliche Darstellung der betreffenden Methoden von Nicolai, Struve, u. s. w. — *Sechster Abschnitt.* Von der Berechnung trigonometrischer Messungen. Ausser den gewöhnlicheren Methoden hauptsächlich die Methoden von **Bessel** und **Gauss**, Reduction des sphärischen Excesses, kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Erde, deren geographische Lage gegeben ist. u. s. w. — *Erster Anhang.* Beschreibung und Gebrauch des Spigelsextanten. Sehr ausführlich, deutlich und praktisch. Hierin verschiedene Methoden der Breiten - und Längenbestimmung, bei denen der Spiegelsextant hauptsächlich Anwendung findet. Correspondirende Höhen. Circummeridian-Höhen. Zwei ausserhalb des Meridians gemessene Höhen. **Gaussische** Methode die Polhöhe, die Uhrcorrection und den Fehler des Instrumentes aus den Zeiten abzuleiten, wo drei verschiedene Sterne einerlei Höhe erreichen. **Knorre's** allgemeine Auflösung dieses Problems, sowohl für den Fall, dass nur drei Sterne beobachtet wurden, als auch für jede beliebige Anzahl von Sternen (Herr Professor **Anger** in **Danzig** hat in den Schriften der dortigen naturforschenden Gesellschaft auch eine Auflösung dieses Problems gegeben, wo, so viel uns jetzt erinnerlich ist, auch schon der Fall einer grösseren Anzahl von Sternen ausführliche Berücksichtigung gefunden hat.). Bestimmung des Azimuths terrestrischer Gegenstände mittelst des Spiegelsextanten. Bestimmung der geographischen Länge durch Monddistanzen. **Borda's**, **Bessels** Methoden u. s. w. *Zweiter Anhang.* Von der Interpolation. Alles praktisch Wichtige enthaltend.

Man wird aus dieser Inhaltsangabe, in welcher der Beschränktheit des Raumes wegen bei Weitem nicht alles Wichtige Platz finden konnte, gewiss die Reichhaltigkeit dieses Werks erkennen, und unser Urtheil gerechtfertigt finden, dass dieses Werk in dem Kreise, welchen es sich selbst gezogen hat, die vollständigste Bearbeitung der praktischen Astronomie liefert, welche wir bis jetzt besitzen.

LXIV.

Literarischer Bericht.

Mechanik.

Der Attractionscalcül. Eine Monographie von Dr. Oskar Schlömilch, Prof. der höheren Mathematik und der analytischen Mechanik an der K. Sächs. techn. Bildungsanstalt zu Dresden. Mit einer Figurentafel. Halle. Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1851. — 58. S. in Octav.

(Angezeigt vom Herrn Professor Dr. Möbius in Leipzig.)

Eine mit der an ihrem Verfasser gewohnten Klarheit und Schärfe geschriebene Abhandlung. Sie zerfällt in zehn Paragraphen: §. 1. Allgemeine Begriffe und Formeln; §. 2. Anziehung sehr weit von einander entfernter Massen; §. 3. Anziehung des abgestumpften Kegels; §. 4. Anziehung der Kugel und Kugelschaale. Der übrige Theil der Schrift behandelt das so vielseitig schon in Angriff genommene Problem der Attraction eines Ellipsoids: §. 5. Anziehung des homogenen dreiachsigen Ellipsoids; §. 6. Formeln für das Rotationsellipsoid; §. 7. Das Reductionstheorem von Ivory. Der in diesen §§. vom Verf. eingeschlagene Weg ist demjenigen ähnlich, welchen Poisson in seinem Traité de Mécanique, 2. édit., Tome I. Seite 185. und folg. genommen, nur dass H. Schl. den Gegenstand auf eine für den Anfänger fasslichere Weise darzustellen und die Schlüsse hier und da schärfer zu begründen sucht.

In den drei noch übrigen §§. (8. 9. 10.) denkt sich der Verfasser des Ellipsoid durch Flächen, welche seiner Oberfläche ähnlich und mit ihr concentrisch sind, in unendlich dünne Schichten zerlegt, und nimmt an, dass die Dichtigkeit, welche im Vorhergehenden für alle Punkte des Ellipsoids dieselbe war, von einer Schicht zur anderen nach einem beliebig gegebenen Gesetze veränderlich sei. Um nun auch die von solch einem nicht homogenen Ellipsoid auf einen in seinem Innern oder ausserhalb liegenden Punkt ausgeübte Anziehung zu bestimmen, beginnt der Verfasser den Calcul ganz von Neuem, wobei er sich des von Le-

jenne Dirichlet erfundenen und von diesem (wie aus Crelle's Journal für Math. XX. Band, Seite 276. zu ersehen) beim homogenen Ellipsoid in Anwendung gebrachten Kunstgriffs bedient, welcher darin besteht, dass man, um den Werth eines bestimmten Integrals zu finden, dasselbe mit einer discontinuirlichen, gleichfalls als bestimmtes Integral ausgedrückten Function multiplicirt, welche innerhalb der Grenzen des ersteren Integrals = 1, über dieselben hinaus aber = 0 ist. Er gelangt auf solche Weise zu einer Formel (no. 97.), welche die Anziehung des Punktes durch ein einfaches bestimmtes Integral ausdrückt, dessen Grenzen durch die Lage des Punktes gegen das Ellipsoid bedingt werden. Hieraus leitet er schlüsslich ein sehr bemerkenswerthes Theorem ab, welches eine Verallgemeinerung des schönen von Legendre zuerst nur für das Rotationsellipsoid und später von Laplace allgemein für jedes homogene Ellipsoid bewiesenen Theorems ist: dass die Anziehung eines äusseren Punktes von einem Ellipsoid dieselbe Richtung hat, wie die Anziehung desselben Punktes von einem zweiten mit dem ersteren confocalen Ellipsoid, dessen Oberfläche durch diesen Punkt geht, und dass sich unter der Voraussetzung, dass beide Ellipsoide einerlei Dichtigkeit haben, die Anziehungen selbst wie die Volumina der beiden Ellipsoide verhalten. Dieser Satz gilt nämlich, wie H. Schl. zeigt, wörtlich auch dann, wenn man statt die zwei Ellipsoide homogen und gleich dicht vorauszusetzen, annimmt, dass — wie sich Ref. ausdrücken möchte — bei dem einen, wie bei dem anderen Ellipsoid die Dichtigkeit in jedem Punkte eine und dieselbe Function des Verhältnisses ist, in welchem der vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Ellipsoide bis an den Punkt gezogene Radius zu dem über den Punkt hinaus bis an die Oberfläche des betreffenden Ellipsoids verlängerten Radius steht. Nur muss Ref. hierbei noch bemerken, dass auf Seite 43 unten, wo in drei Zeilen auf das in der Geschichte dieser Untersuchungen Epoche machende Legendre'sche Theorem, als eine einfache Folgerung aus dem allgemeineren Theorem, hingedeutet wird, der Name Legendre's mit zu nennen gewesen wäre, indem ohne solches es scheinen muss, als ob H. Schl. jenes Theorem als schon entdeckt nicht gekannt habe.

Die Geschicklichkeit, welche H. Schl. bei der Entwickelung seiner Formeln für das nicht homogene Ellipsoid durch mannigfache zum Theil sehr kunstreiche Transformationen bestimmter Integrale beweist, verdient rühmliche Anerkennung. Dass aber dadurch die Theorie der Attraction des Ellipsoids eine wesentliche Bereicherung erhalten habe, wie doch der Leser nach der der Schrift vorausgeschickten kurzen Einleitung zu erwarten berechtigt ist, muss Referent in Abrede stellen. Denn die das Endresultat in sich fassende Formel No. 97. ist nach Weglassung des Integralzeichens vollkommen einerlei mit der schon vor längerer Zeit von Poisson gegebenen Formel für die Attraction einer unendlich dünnen von zwei concentrischen und einander ähnlichen Ellipsoidenflächen begränzten Schicht auf einen äusseren Punkt, wenn diese Formel noch mit der die Dichtigkeit der Schicht ausdrückenden Function multiplicirt wird.

Man findet diese Poisson'sche Formel überaus einfach hergeleitet in einem Aufsatze Plana's in Crelle's Journal, XX. Band,

Seite 217. und 218. Sie ergiebt sich hiernach, wenn man zuerst mit Hülfe des Ivory'schen Theorems die Formel für die Attraction eines Ellipsoids auf einen äusseren Punkt entwickelt (Legendre Traité des fonct. ellipt., Tome I., pag. 554.), und sodann diese (das Legendre'sche Theorem in sich schliessende) Formel, nachdem sie auf passende Weise umgebildet worden, nach den Dimensionen des Ellipsoids unter der Hypothese differentiirt, dass letzteres sich ähnlich bleiben soll. — Mit Anwendung dieses Verfahrens würden sich die zur Schlussformel Nr. 97. nöthigen Entwickelungen, wozu H. Schl. den Raum von Seite 33. bis 41. und in hinzugefügten an sich sehr schätzenswerthen Noten von Seite 51. bis 58. verwendet, auf etwa vier Seiten haben reduciren lassen. M.

Astronomie.

Uranos. Synchronisch geordnete Ephemeride aller Himmelserscheinungen des Jahres 1851, erstes Semester. Vom Jahre 1846 an herausgegeben von der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Breslau. Sechster Jahrgang. Breslau. 1851.

Zweck und Tendenz dieser sehr empfehlenswerthen Ephemeride sind aus unseren früheren Berichten hinreichend bekannt. Wir machen aber darauf aufmerksam, dass von jetzt an die gewiss sehr zweckmässige Einrichtung getroffen worden ist, dass dieselbe in sechs Monate umfassenden Heften erscheint. Diese Einrichtung wird der weiteren Verbreitung dieser Ephemeride gewiss sehr förderlich sein, da die einzelnen Monate nun früher in die Hände der Beobachter gelangen.

Physik.

Aufgaben aus der Physik nebst ihren Auflösungen. Zum Gebrauch für Lehrer und Schüler an höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht bearbeitet von Dr. C. Fliedner, Hauptlehrer an der Realschule zu Hanau. Mit 91 Holzschnitten. Braunschweig. 1851. 8.

Diese Sammlung von vorzugsweise aus dem Gebiete der mathematischen Physik entnommenen Aufgaben scheint uns ihrem Zwecke recht wohl zu entsprechen, und verdient Lehrern der Physik zur Beachtung empfohlen zu werden. Die Auflösungen sind beigefügt. Die Aufgaben betreffen: Bewegung der Körper. Maass der Kräfte und ihrer Leistungen. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Schwerpunkt und Trägheitsmoment. Einfache Maschinen. Centrifugal- nnd Centripetalkraft. Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenem Wege (Pendel). Stoss. Reibung. Festigkeit. Gleichgewicht und Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Gleichgewicht zwischen

tropfbaren flüssigen und festen Körpern. Specifisches Gewicht. Bewegung des Wassers. Gleichgewicht und Druck der Luft. Schall. Ausdehnung der Körper durch die Wärme. Wärmecapacität und Aenderung des Aggregatzustandes. Dämpfe, besonders Wasserdämpfe. Verbrennung und Heizung. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts. Sehwinkel. Schatten. Geschwindigkeit des Lichts. Photometrie. Reflexion. Brechung. Linsengläser. Optische Instrumente. Magnetismus. Electricität.

Durch grössere Reichhaltigkeit und theilweise grössere Schwierigkeit der Aufgaben scheint diese Sammlung Vorzüge vor der früher erschienenen Sammlung physikalischer Aufgaben von F. Kries. Jena 1843. zu haben.

Vermischte Schriften.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. Vergl. Liter. Bericht Nr. LVI.

(Leider ist uns Nr. XXIV. dieses ausgezeichneten Journals, wahrscheinlich durch ein Versehen, noch nicht zugegangen, und wird daher später noch angezeigt werden.)

No. XXV. On certain General Properties of Homogeneous Functions. By J. J. Sylvester. — On the Intersections of Two Conics. By J. J. Sylvester. — On certain „Loci" connected with the Geodesic Lines of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Two Arithmetical Theorems. By Henry Wilbraham (Diese Theoreme sind folgende: I. Let m be any number not divisible by 2 or 5, and suppose $\frac{1}{m}$ when reduced to a circulating decimal to have a recurring period of p digits; and let N be any other number, in which the number of digits is greater than p: if N be marked off into periods of p digits each (beginning at the units), and these several periods, each considered as a number consisting of p digits, be added together, and the sum be n; then, if n be divisible by m, N also will be divisible thereby; and if n be not so divisible, the remainder, on dividing n by m, will be the same as that found on dividing N by m; or in other words, n will be congruous to N with respect to the modulus m. — II. If m be a prime number, and p be an even number, N may be divided into periods of $\frac{1}{2}p$ digits each; and of these periods, if the 1st, 3rd, 5th, etc. be added together and also the 2nd, 4th, 6th, etc. and the latter sum subtracted from the former, and the difference be called n; then, as in the former theorem, n will yield the same remainder as N on division by m. If n be negative and not divisible by m, the proper remainder is the difference between n and the multiple of

m next above it numerically.) — Application of Combinations to the Explanation of Arbogast's Method. By Professor De Morgan. — Notes on Lagrange's Theorem. By Arthur Cayley. — On a double Infinite Series. By Arthur Cayley. — Laws on the Elasticity of Solid Bodies. By W. J. Macquorn Rakine. — Mathematical Notes: I. A Demonstration of Taylor's Theorem. By Homersham Cox. II. Demonstration of the known Theorem, that the Arithmetic Mean between any number of Positive Quantities is greater than their Geometric Mean. By A Thacker. — On the Construction of the Ninth Point of Intersection of Two Curves of the Third Degree, when the other Eight Points are given. By Thomas Weddle. — On the Theory of Linear Transformations. By George Boole.

(The Next Number will be Published on the 1st of May.)

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung in Aarau am 5. 6, 7 August 1850. 35ste Versammlung. Aarau 8.

Von den grösseren in diesem Hefte enthaltenen Abhandlungen machen wir auf die folgenden aufmerksam:

Vortrag des Herrn Leopold von Buch: Ueber einige Riesenthiere der Vorwelt.

Prof. C. F. Schönbein: Ueber den Einfluss des Lichtes auf die chemische Thätigkeit des Sauerstoffs.

Prof. Möllinger: Ueber einen Universalzirkel.

Prof. Mousson: Ueber die Whewell'schen oder Quetelet'schen Streifen.

Ausserdem findet man in diesen Verhandlungen S. 157. — S. 169. eine interessante Lebensbeschreibung des zu Bern verstorbenen verdienten Professors der Mathematik Johann Friedrich Trechsel daselbst, aus welcher wir die folgenden kurzen Notizen ausheben.

Johann Friedrich Trechsel wurde am 4ten März 1776 in der Bernischen Municipalstadt Burgdorf als das jüngste von zwölf Kindern geboren. Schon im 13ten Jahre bezog er die höhere Lehranstalt zu Bern, mit dem Vorsatze, Theologie zu studiren. Später wandte er sich auf den Rath des Professors Itth mehr dem Studium der Mathematik zu, in welcher Tralles, nachheriges Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin, sein Lehrer war. Im Jahre 1805 erhielt er die Professur der Mathematik an der am 2ten November des genannten Jahres errichteten (im Jahre 1834 zu einer Universität erhobenen) Bernischen Akademie, und im Jahre 1812 auch noch die der Physik. Trechsel besass ein ausgezeichnetes Lehrtalent, und hat sich sowohl als Lehrer, als auch namentlich durch die trigonometrische Aufnahme des Kantons Bern um sein Vaterland sehr verdient gemacht, da er auch stets den lebhaftesten Antheil an dessen politischen

Schicksalen nahm, und neben seinem Lehramte oft noch öffentliche bürgerliche Aemter bekleidete. Sein Charakter wird in diesem Nekrolog als ein höchst liebenswürdiger, in jeder Beziehung höchst ehrenwerther geschildert. Die Treue in jeder Beziehung galt ihm für das Höchste im Leben, und er hat sie geübt wie Wenige, sagt sein Biograph. Mit vielen der berühmtesten Gelehrten des In- und Auslandes stand er in lebhaftem wissenschaftlichen Verkehr. Seine sonst felsenfeste Gesundheit wurde späterhin theils durch die Anstrengungen bei seinen geodätischen Arbeiten, theils durch mancherlei erlittene Kränkungen und ihn betroffene Unglücksfälle geschwächt. Er starb am 26sten November 1849 früh um 7 Uhr im 74sten Lebensjahre nach kurzem Krankenlager. Der Redner an seinem Grabe schloss mit dem mit vollem Rechte auf ihn anwendbaren Bibelworte: „Sein Leben ist köstlich gewesen, denn es ist lauter Mühe und Arbeit gewesen.“

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, im März 1851. (Soweit derselbe die Mathematik betrifft).

I. Bericht über die im Jahre 1850 eingegangenen Preisbewerbungsschriften.

Ueber die zuerst im Jahre 1849 gestellte, und darauf im Jahre 1850 wiederholte Preisaufgabe:

> „Unter den von den Alten erwähnten Sonnen- und Mondfin-
> „sternissen die beachtenswerthesten von Neuem zu prü-
> „fen, und nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrech-
> „nung zu entscheiden, ob und welchen Einfluss eine angemes-
> „sene Berücksichtigung derselben auf die Bestimmung der
> „Mondelemente, insbesondere der Knoten, haben würde“

ist der Gesellschaft nur eine einzige Bewerbungsschrift unter dem Titel:

> „Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse
> „des Almagest“

und mit dem Motto

> „*Multiformi luna ambage torsit ingenia contemplantium et proximum*
> „*sidus ignorari maxime indignantium.* (Plin. H. N. II, 9.)“

zugesendet worden. Der Verfasser dieser Abhandlung hat nun zwar die gestellte Frage nur theilweise beantwortet, indem er Sonnenfinsternisse gar nicht, und von den Mondfinsternissen blos die 19 im Almagest verzeichneten berücksichtigte. Da sich jedoch seine Schrift bei genauerer Prüfung in ihren Angaben als sehr zuverlässig erwies, da sie den Gegenstand mit Gewandtheit und richtigem Tacte behandelt hat, und die darin enthaltenen, mittelst der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Correctionen der mittleren Bewegungen des Mondes und seiner Knoten von nicht unerheblichem Interesse erscheinen, so fand sich die Gesellschaft bewogen, dem Verfasser zwei Drittel des ausgesetzten Preises als Accessit zuzuerkennen.

Bei Eröffnung des versiegelten Zettels ergab sich als der Verfasser dieser Abhandlung

Julius Zech,
Dr. phil. in Stuttgart.

II. Preisfrage für das Jahr 1852.

Aus der Astronomie. Für das Jahr 1852.

Der Verfasser der von unsrer Gesellschaft in diesem Jahre mit dem Accessit ausgezeichneten Abhandlung „über die Mondfinsternisse des Almagest", Herr Dr. Zech in Stuttgart, hat durch Berechnung dieser Finsternisse mittelst der Damoiseau'schen Mondtafeln als ziemlich sichres Resultat gefunden, dass in genannten Tafeln die hundertjährige Knotenbewegung des Mondes um etwa $1',7$ zu vermindern, also $=134^0\,8'15''$ zu setzen, und die hundertjährige mittlere Bewegung des Mondes um etwa $0',5$ zu vermehren, also $=307^0\;53'\;12''$ anzunehmen sei. Da mit Anwendung dieser Correctionen, welche den bekannten Airy'schen nahe kommen, es Herrn Zech gelungen ist, die 19 Finsternisse des Almagest im Ganzen sehr befriedigend durch Rechnung darzustellen, so findet sich die Gesellschaft veranlasst, folgende neue Preisaufgabe vorzulegen:

> „die unten verzeichneten, auf zuverlässigen Angaben von Schriftstellern des classischen Alterthums beruhenden Finsternisse nach den Damoiseau'schen Mondtafeln, mit Hinzufügung der vorbemerkten zwei Correctionen zu berechnen, dafern jedoch die Resultate der Rechnung nicht eine zureichende Uebereinstimmung mit den Angaben der Schriftsteller zeigen sollten, zu untersuchen, ob und welche mit der historischen Chronologie vereinbare Abänderungen der für jene Finsternisse seither angenommenen Jahre etwa zu befriedigenderen Ergebnissen führen möchten."

Verzeichniss der zu berechnenden Finsternisse.

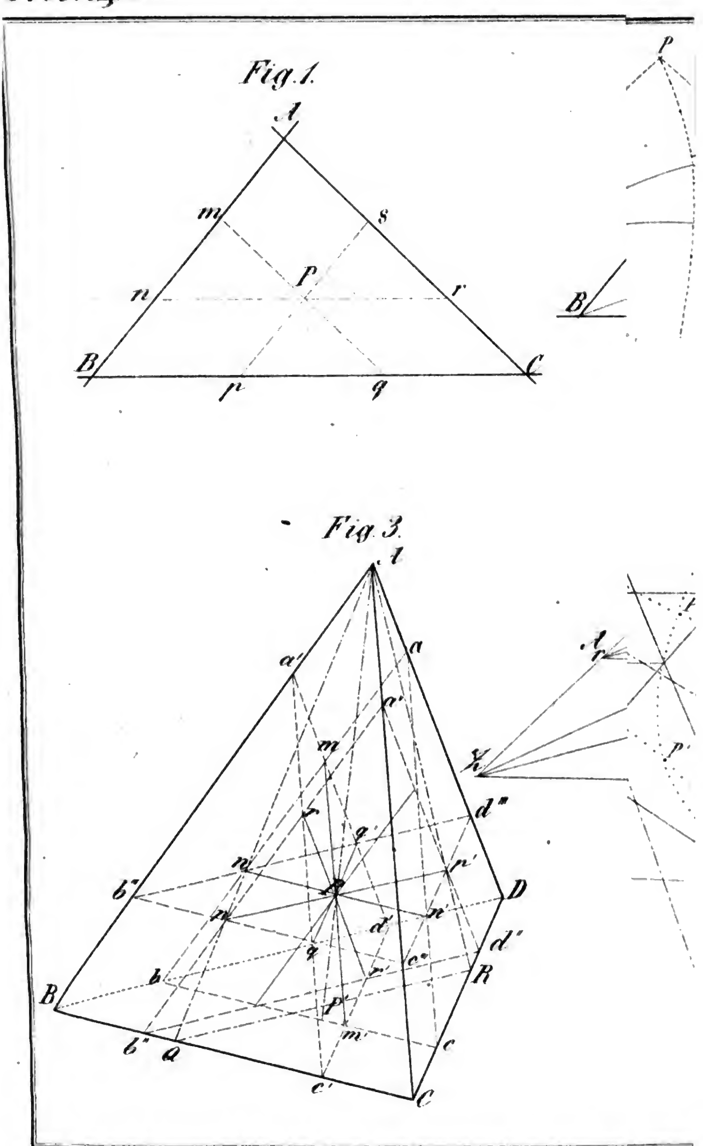
1.	☉ F. zu Sardes, im zeitigen Frühjahr, Ol. 74, 4. Herod. 7, 37. (Schol. Aristid. p. 222)	480(?)	vor Chr.
2.	☉ F. zu Athen, nach Mittag, im Sommer Ol. 87, 2. Thuk. 2, 28.	3. Aug. 431	„ „
3.	☉ F. zu Athen, im Anfange des Frühjahrs Ol. 88, 4. Thuk. 4, 52.	20. März 424	„ „
4.	☽ F. zu Syrakus, im Spätsommer Ol. 91, 4. Thuk. 7, 50. Plut. Nik. 23, 28.	27. Aug. 413	„ „
5.	☽ F. zu Athen, Abends, Ol. 93, 3. Xen. Hell. 1, 6, 1.	15. April 406	„ „
6.	☉ F. zu Athen Ol. 94, 1. Xen. Hell. 2, 3, 4.	2. Sept. 404	„ „
7.	☉ F. in Böotien, im Sommer Ol. 96, 3. Xen. Hell. 4, 3, 10	13. Aug. 394	„ „

8. ☽ F. zu Arbela, am 15. Boedromion Ol. 112, 2. Plut. Alex. 31. Arrian. Anab. 3, 7, 6 u. 15, 7. Vgl. Ptolem. Geogr. 1, 4. Plin. hist. nat. 2. 70.	20. Sept. 331	vor Chr.
9. ⊙ F. zwischen Sicilien und Africa Ol. 117, 2. Diod. 20, 6. Just. 22, 6.	14. Aug. 310	„ „
10. ☽ F. in Makedonien, am 3. röm. Septbr. 586 u. c. Cic. d. rep. 1, 15. Plin. 2, 12. Plut. Aem. Paul. 17. Liv. 44, 37.	21. Juni 168	„ „
11. ☽ F. in Pannonien. Tac. Ann. 1, 28. Dio Cass. 57, 4.	26. Sept. 14	nach Chr.
12. ⊙ F. zu Rom. Tac. Ann. 14, 12. Plin. h. n. 2. 70. Dio Cass. 61, 16.	30. April 59	„ „
13. ☽ F. zu Rom } Plin. hist. nat. 2, 13.	4. März 71	„ „
14. ⊙ F. daselbst } Plin. hist. nat. 2, 13.	19. März —	„ „
15. ⊙ F. in Sicilien, um Mittag, Firmic. Mat. astr. 1. 2.	17. Juli 334	„ „
16. ⊙ F. in Mesopotamien, bei Sonnenaufgang. Ammian. Marc. 20, 3.	27. Aug. 360	„ „

Die Preisbewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der auswendig dasselbe Motto trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet für das Jahr der Preisfrage mit dem Monat November; die Adresse ist an den jedesmaligen Secretair der Gesellschaft (für das J. 1851 an den ordentl. Prof. der Mineralogie und Geognosie an der Universität zu Leipzig C. F. Naumann) zu richten. Der ausgesetzte Preis beträgt für die Aufgabe aus der Astronomie 24 Ducaten.

Druckfehler.

In der Ueberschrift des Aufsatzes Nr. XXXVII. in Thl. XVI. Heft 4. S. 424. s. m. „Scheffler“ statt „Seheffler“.


Fig. 1.
A
m
s
P
n
r
B
C
p
q
Fig. 3.
A
a'
a
a"
m
r
q'
d"
n
r'
b"
D
n
n'
d'
d'
q
r'
c"
R
b
B
P'
m'
c
b"
Q
c'
C

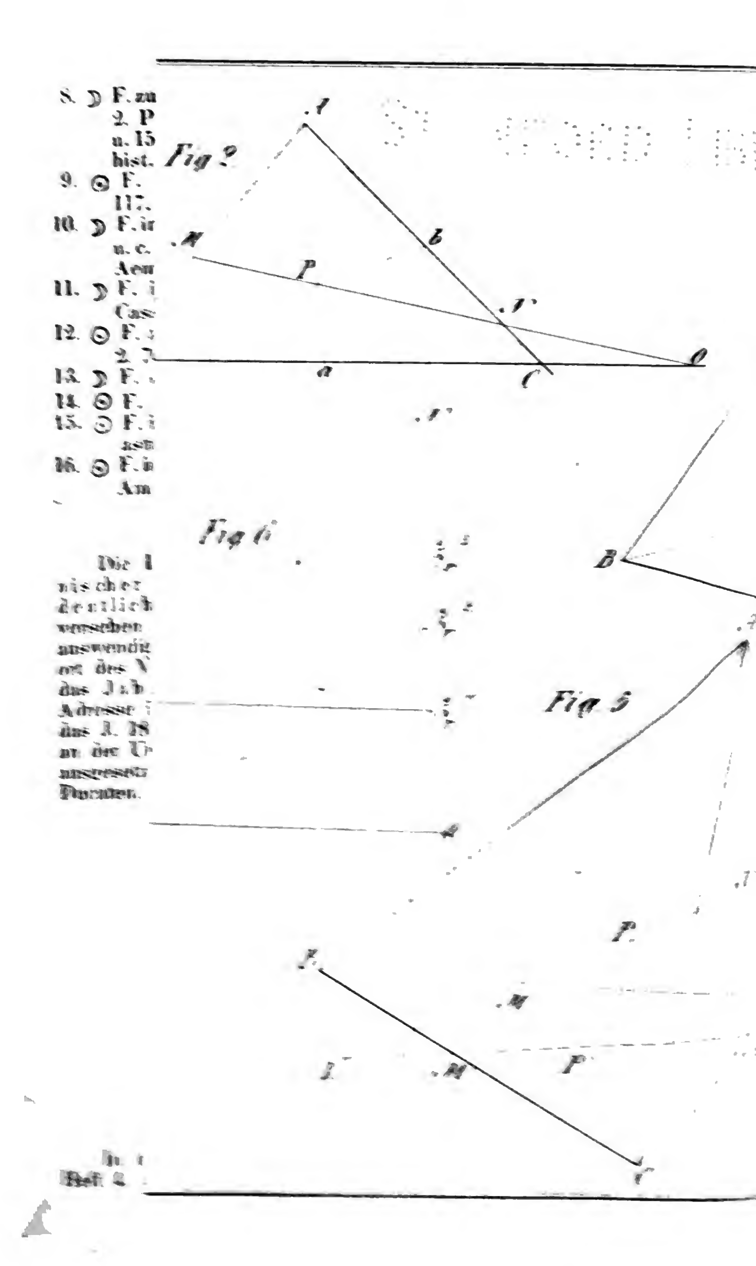


Fig 2
Fig 6
Fig 5

Taf. I.

Fig. 4.

8. ☽ F
2
u
h

Fig. 2.

9. ⊙
I
10. ☽ I
u
A
11. ☽ I
C

M

12. ⊙
2
13. ☽ I
14. ⊙
15. ⊙
a
16. ⊙ I
A

Fig

Die
nische
deutli
versehe
auswen
ort des
das Ja
Adresse
das J.
an der
ausgese
Ducater

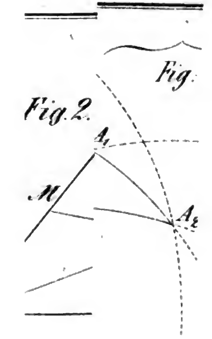
In
Heft 4.

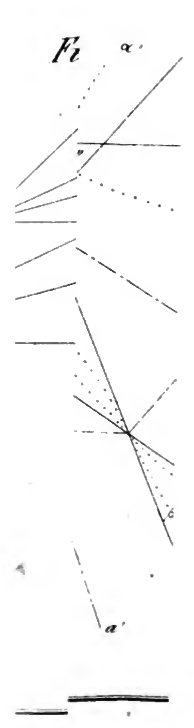
Fig. 3.

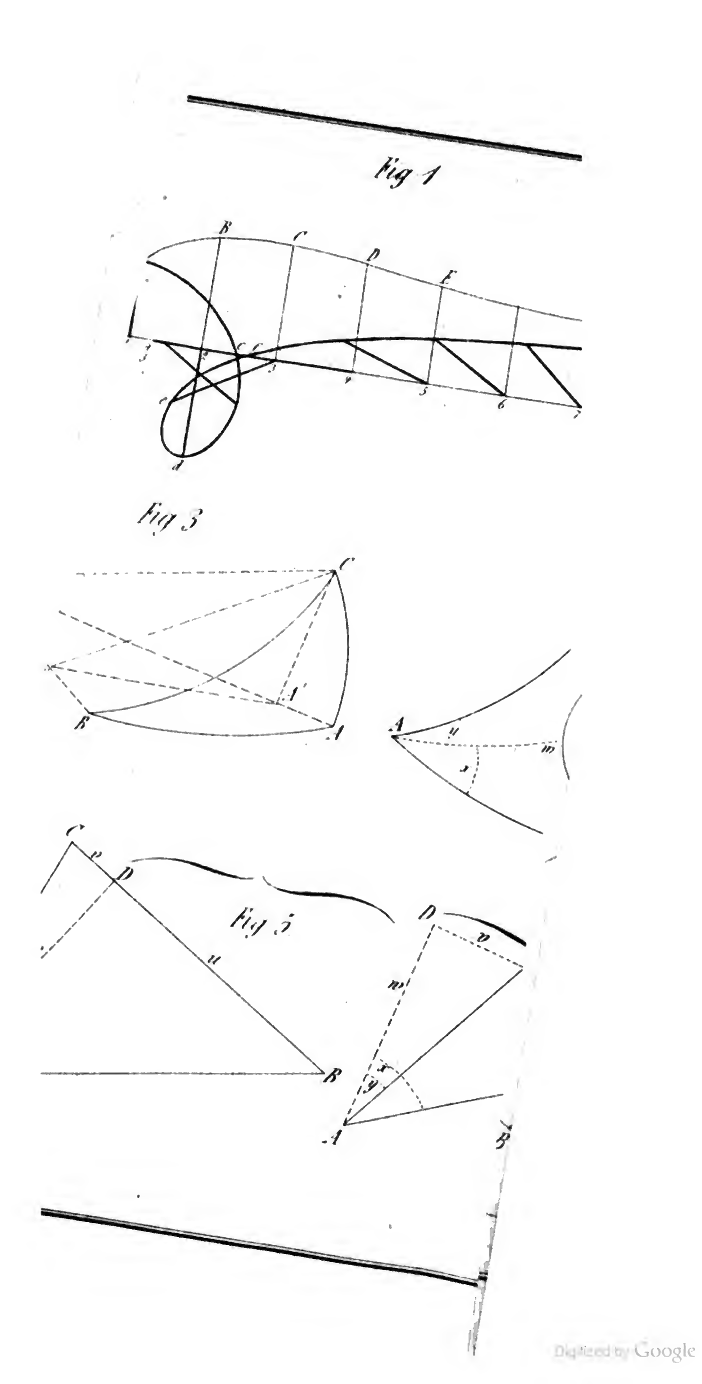
Fig. 1

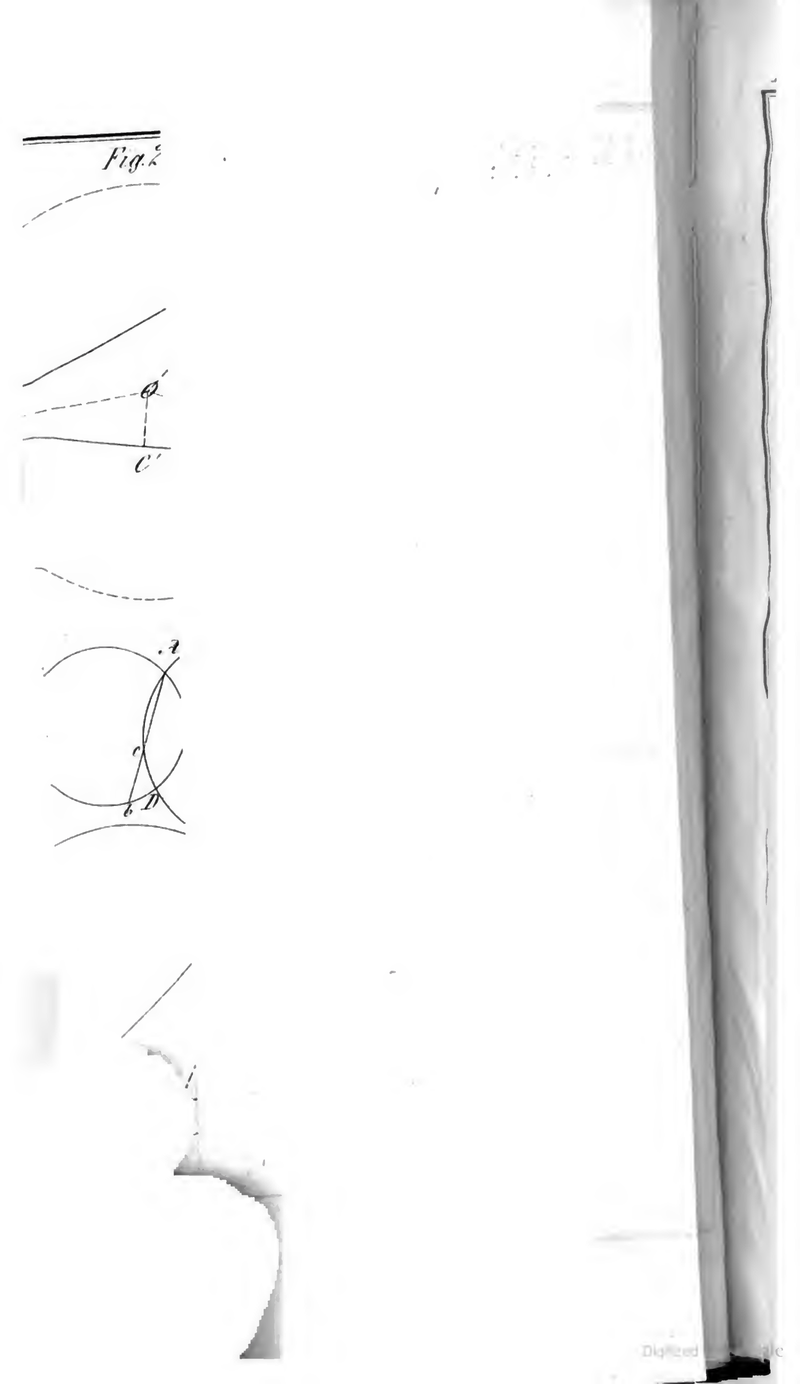
Fig. 3.a

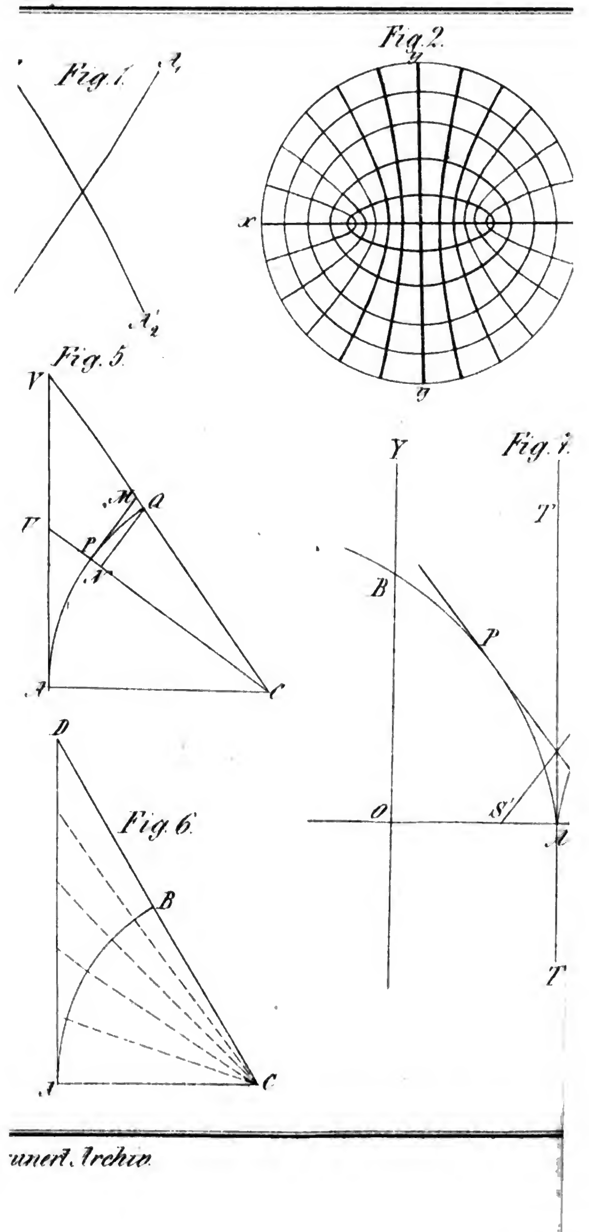
Archiv.

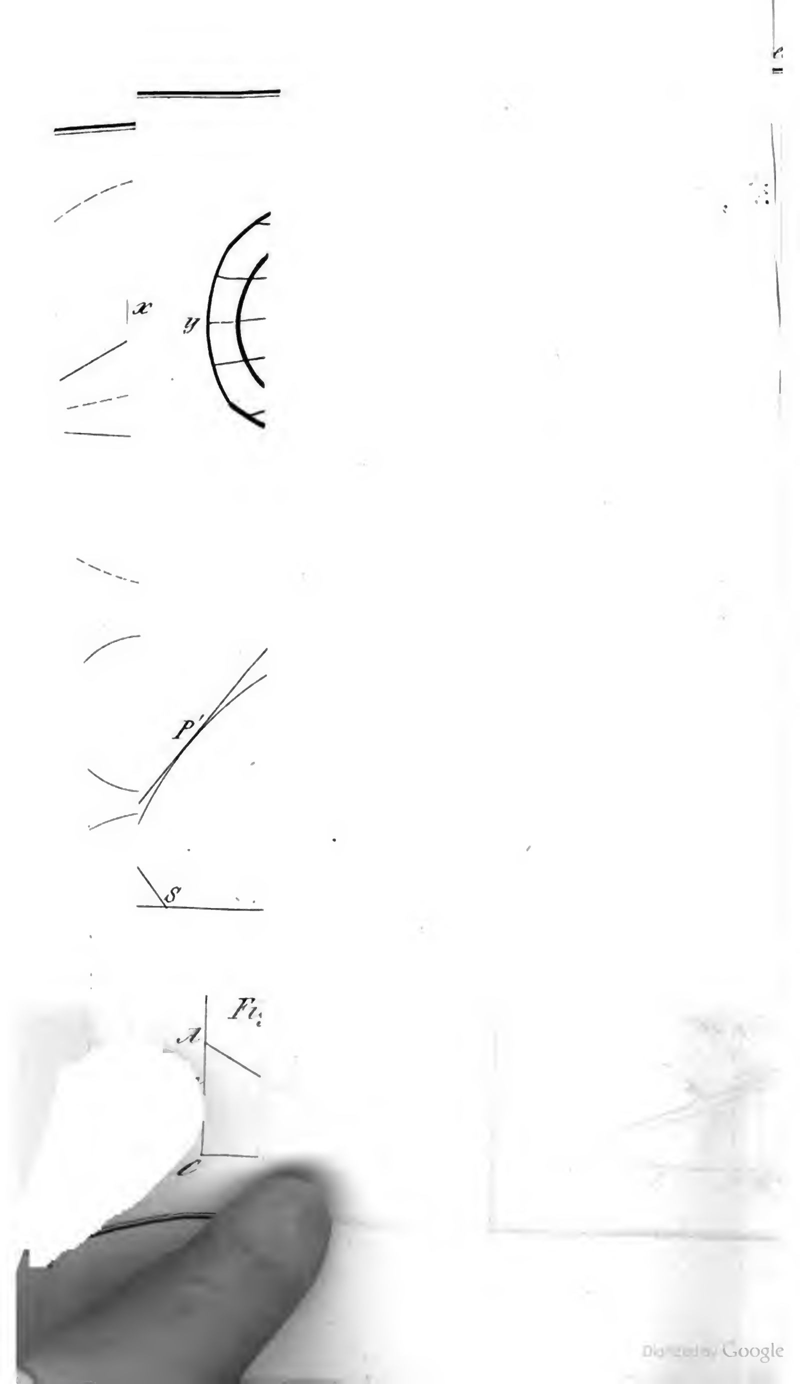

Fig.
Fig.2.
A_1
M
A_2


Fi
α
a'

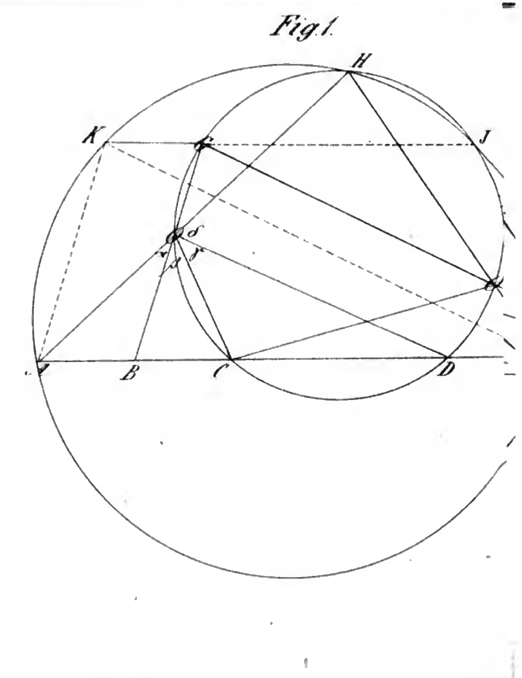

Fig 1
Fig 3
Fig 5

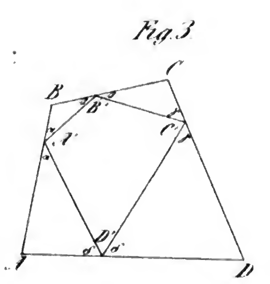

Fig. 2
O'
C'
A
c
b
D

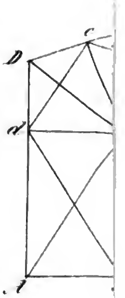

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
unert. Archiv



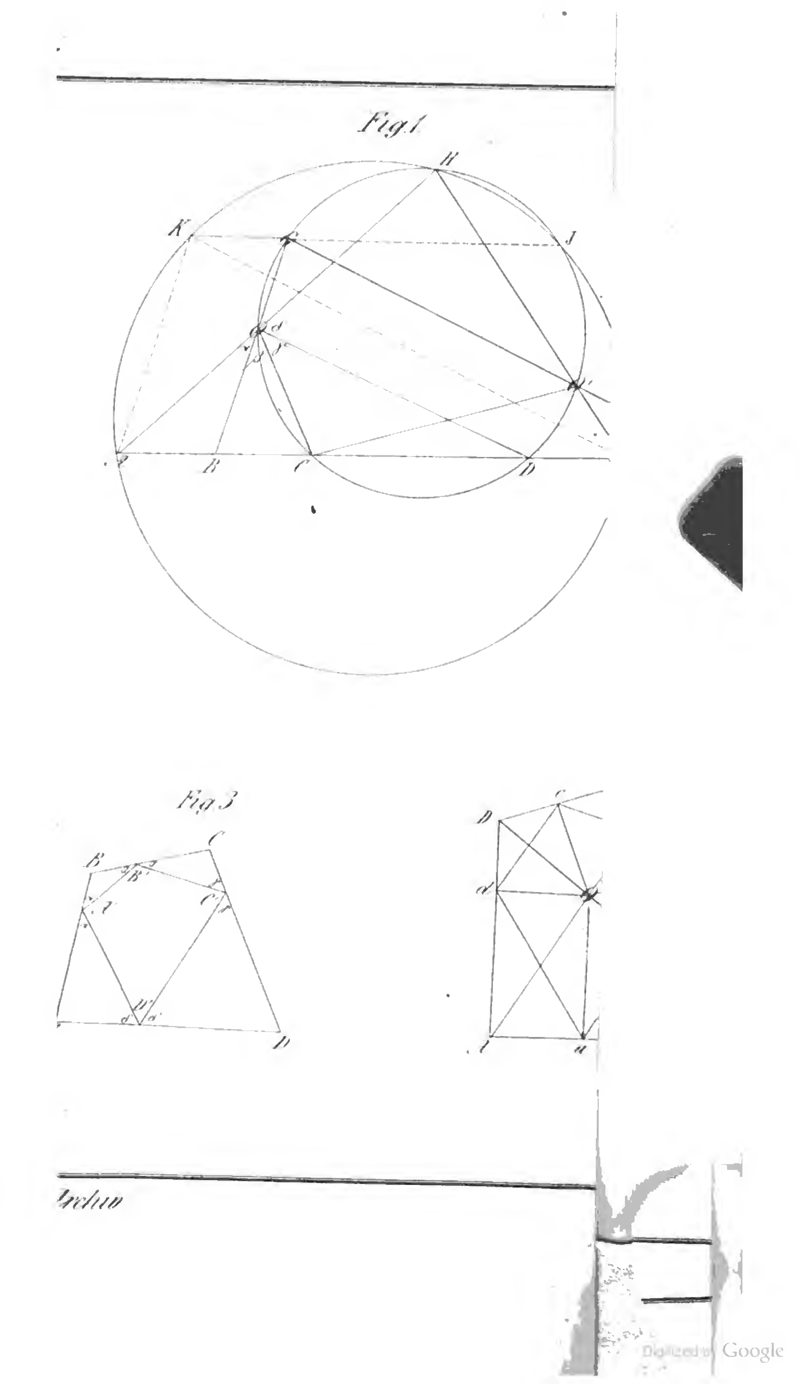
x
y
P'
S
A
C


Fig.1.
H
K
J
B
C
D

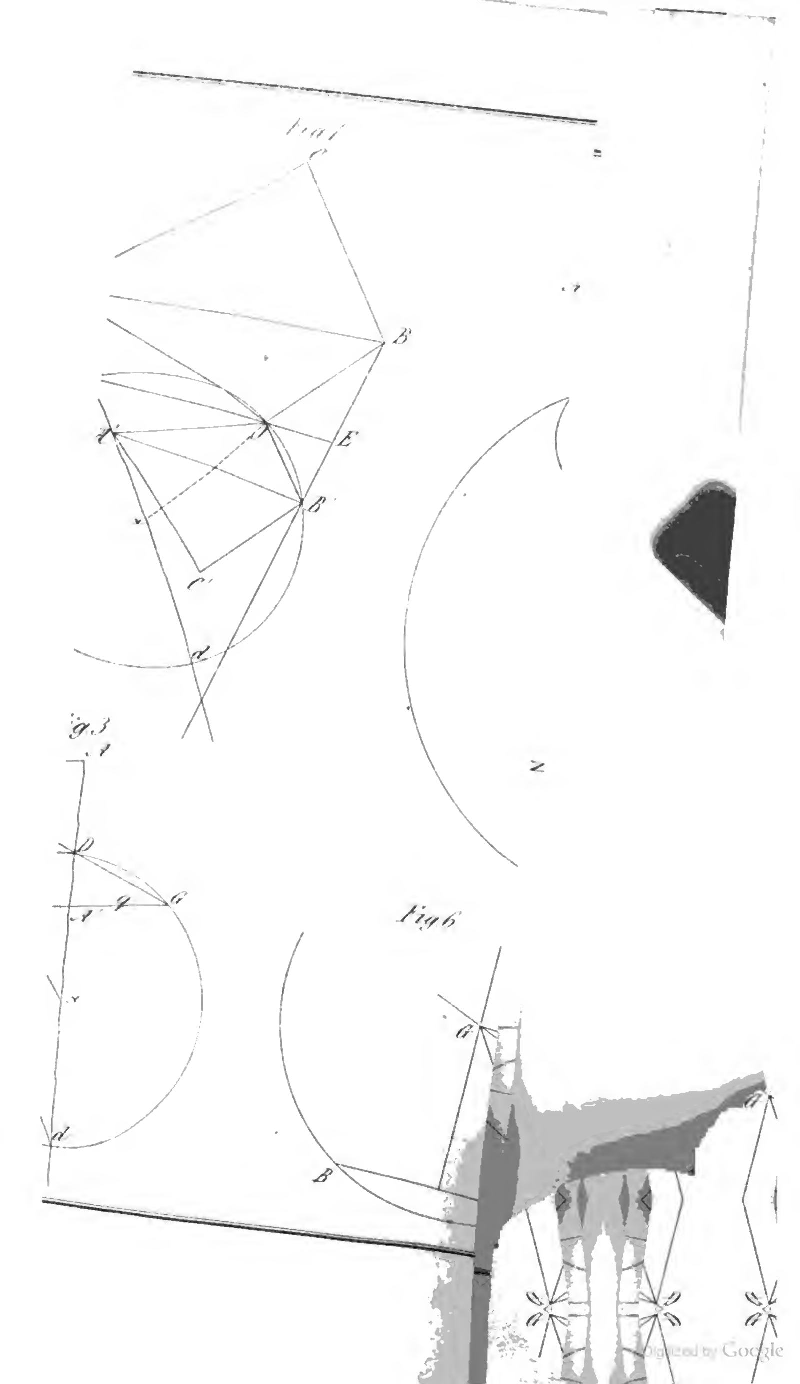

Fig.3.
B
C
B'
C'
D'
D


D
c
d




Fig.1
H
K
J
B
C
D
Fig.3
B
C
B'
C'
D
D
C
d
Archiv




Fig 1
C
B
E
B'
C'
d
g 3
D
G
d
Fig 6
G
B

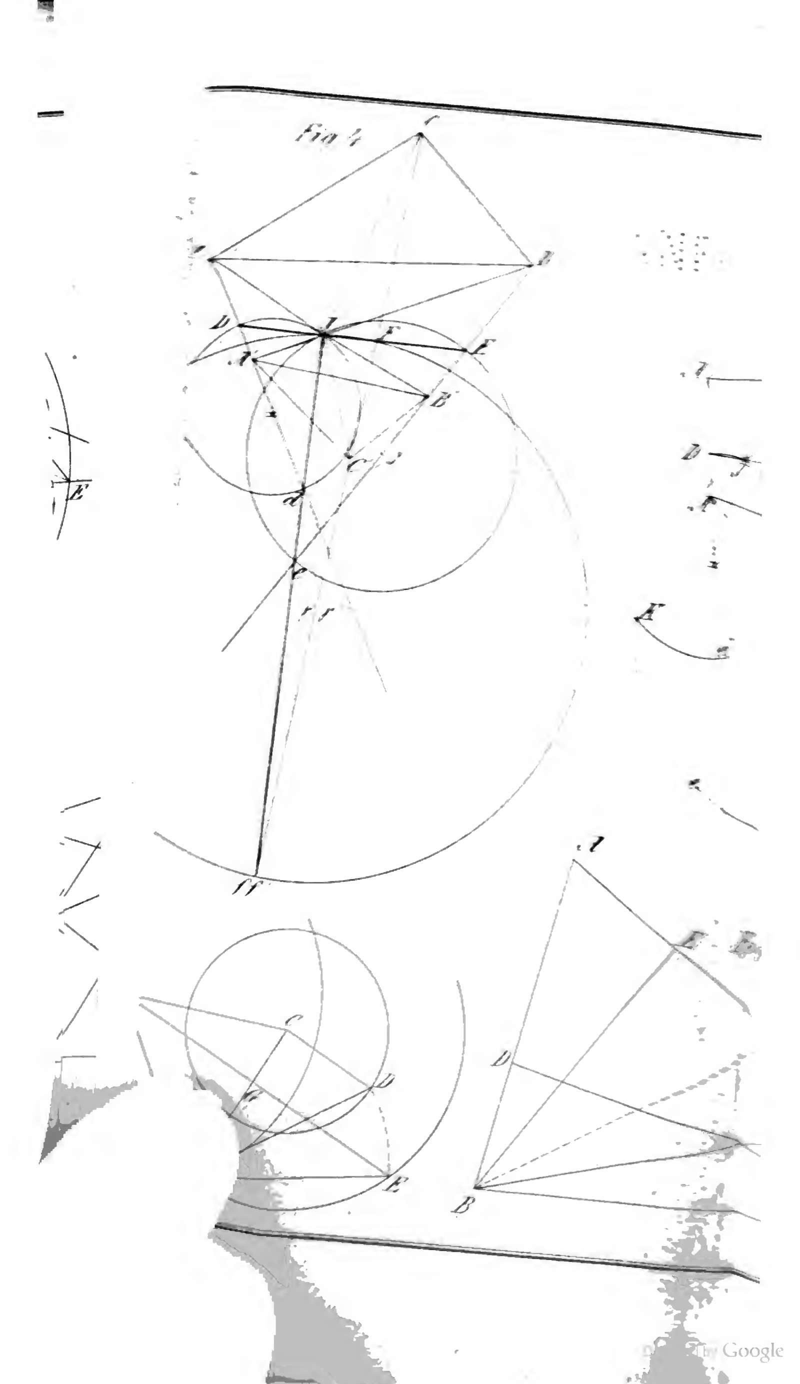


Fig. 4
A
B
D
E
B
d
e
ff
C
D
E
A
D
B
E



Theil.





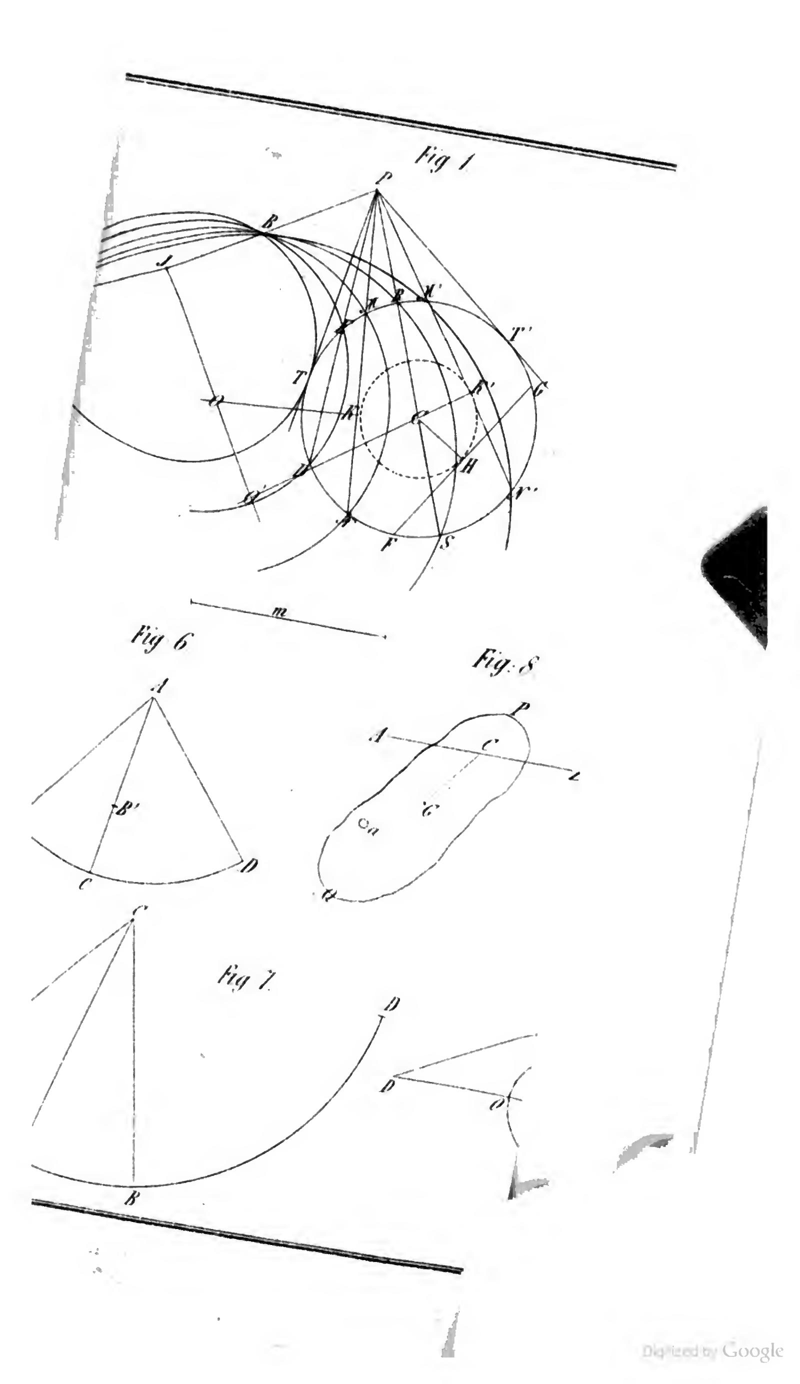


Fig 1
Fig 6
Fig: 8
Fig 7
m

